

Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет

Е.А. НОВИКОВА

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Лабораторный практикум

Под редакцией профессора В.В. Морозова

Владимир 2004

УДК 681.3.066+519.683/688

Н73

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент
Владимирского государственного университета
Д.Ю. Данченко

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Новикова Е.А.

Н73 Основы математического моделирования: Лаб. практикум /
Владим. гос. ун-т. Владимир, 2004. 80 с.
ISBN 5-89368-468-0

Изложена методика выполнения лабораторных работ по дисциплине «Основы математического моделирования». Изучаются основные методы и приемы численного, графического и символьного моделирования наиболее распространенных задач, возникающих в технических приложениях, с помощью пакета математических и инженерных расчетов Mathcad. Приведены примеры решения алгебраических и дифференциальных уравнений, обработки табличных и экспериментальных данных, интегрирования и дифференцирования, спектрального анализа.

Предназначен для студентов специальностей 120100 – технология машиностроения и 120700 – машины и технология высокоэффективных процессов обработки материалов, высших учебных заведений всех форм обучения.

Ил. 19. Табл. 17. Библиогр.: 27 назв.

УДК 681.3.066+519.683/688

ISBN 5-89368-468-0

© Владимирский государственный
университет, 2004

Введение

Широкое внедрение математических методов в самые разнообразные сферы деятельности сегодня уже никого не удивляет. В большой мере это относится к техническим сферам, особенно к технологии машиностроения, являющейся фундаментом технических наук машиностроительного профиля. Новый стимул для математизации прикладных наук дало тотальное распространение информационных технологий. Эффективность информационного подхода в решении инженерных задач напрямую зависит от степени их формализации, что и составляет предмет математического моделирования.

Поэтому специалистам в области технологии машиностроения, конструкторам и технологам, необходимо владеть концепциями и методами математического моделирования, иметь представление об инструментарии, применяемом при моделировании, понимать, что задачи самого разного содержания очень часто описываются одним математическим аппаратом.

Практикум ориентирован на самостоятельную работу студентов в компьютерном классе. Пособие построено на базе системы *Mathcad*, которая выгодно отличается от других пакетов легкостью освоения и уникальным интерфейсом, позволяющим наглядно проводить сложные выкладки, быстро строить графики, проводить символьные преобразования и т.п. Этот пакет фактически лег в основу преподавания дисциплин, имеющих дело с вычислениями и математическим моделированием, во многих вузах России (см. библиографию).

Пособие охватывает следующие разделы: решение алгебраических и трансцендентных уравнений, обработка табличных и экспериментальных данных, численное интегрирование и дифференцирование, решение обыкновенных дифференциальных уравнений, решение дифференциальных уравнений в частных производных, спектральный анализ и синтез. В книгу вошло далеко не все, чем должен владеть инженер, а только самые базовые методы численного анализа, которые необходимы в первую очередь. При этом за рамками книги остались темы формального численного анализа (выбор алгоритмов, вычисление погрешностей, анализ сходимости и т.п.), а акцент сделан на практическое освоение перечисленных задач с помощью функций и алгоритмов, уже реализованных в системе *Mathcad*.

При составлении практикума были использованы пособия и справочная литература [1–16], а также ресурсов интернет [1–13], которые рекомендуются читателям для дальнейшего изучения.

Лабораторная работа 1 Основы работы с Mathcad

В настоящее время развитие науки и техники характеризуется широким проникновением идей и методов математики. Математика превратилась в обычный инструмент исследования, потребность в использовании которого ощущает все больше и больше специалистов в самых разных областях инженерной деятельности. Математическое моделирование базируется на «двух китах»: знании определяющих величин исследуемого объекта (или системы) и знании методов математики, позволяющих строить модели.

Современные программные продукты делают доступными даже самые сложные математические методы, например, эффективная математическая система Mathcad. Среди множества таких прикладных пакетов, как MATLAB, Maple, Mathematica и другие, Mathcad занимает особое место, так как является единственной системой, в которой описание решения математических задач задается с помощью привычных математических формул и знаков, имеет удобный математико-ориентированный интерфейс и хорошие средства научной графики.

Mathcad работает с *документами*. С точки зрения пользователя, документ – это чистый лист бумаги, на котором можно размещать области трех основных типов: математические выражения, текстовые фрагменты и графические области.

Математические выражения

К основным элементам математических выражений Mathcad относятся *типы данных, операторы, функции и управляющие структуры*.

Типы данных

К *типам данных* относятся числовые константы, обычные и системные переменные, массивы (векторы и матрицы) и данные файлового типа.

Константами называют поименованные объекты, хранящие некоторые значения, которые не могут быть изменены. *Переменные* являются поименованными объектами, имеющими некоторое значение, которое может изменяться по ходу выполнения программы. Имена констант, переменных и иных объектов называют *идентификаторами*. Идентификаторы в Mathcad представляют собой набор латинских или греческих букв и цифр.

В Mathcad содержится небольшая группа особых объектов, которые нельзя отнести ни к классу констант, ни к классу переменных, значения которых определены сразу после запуска программы. Их правильнее считать системными переменными, имеющими предопределенные системой начальные значения.

Обычные переменные отличаются от системных тем, что они должны быть предварительно определены пользователем, т.е. им необходимо хотя бы однажды присвоить значение. В качестве оператора присваивания используется знак $:=$, тогда как знак $=$ отведен для вывода значения константы или переменной.

Если переменной присваивается начальное значение с помощью оператора $:=$, то такое присваивание называется *локальным*. До этого присваивания переменная не определена и поэтому ее нельзя использовать. Однако с помощью знака \equiv можно обеспечить *глобальное присваивание* (см. пример 1 на рисунке). Существует также жирный знак равенства, который используется, например как оператор приближенного равенства при решении систем уравнений.

Операторы

Операторы – элементы Mathcad, с помощью которых можно создавать математические выражения. К ним, например, относятся символы арифметических операций, знаки вычисления сумм, произведений, производной, интеграла и т.д. После указания операндов (параметров операторов) операторы становятся исполняемыми по документу блоками, например $2 + 5$ – оператор сложения с двумя операндами.

Функции

В пакете Mathcad имеется множество встроенных функций, т.е. функций, заблаговременно введенных разработчиками. Главным признаком функции является возврат значения, т.е. функция в ответ на обращение к ней по имени с указанием ее аргументов должна вернуть свое значение.

Важная особенность – возможность задания внешних функций, или функций пользователя. Следует особо отметить разницу между аргументами и параметрами функции. Переменные, указанные в скобках после имени функции, являются ее аргументами и заменяются при вычислении функции значениями из скобок. Переменные в правой части определения

функции, не указанные в скобках в левой части, являются параметрами и должны задаваться до определения функции (см. пример 2 на рисунке).

The screenshot shows the Mathcad Professional interface with the following content:

Пример 1. Определение переменных

$a := 4$ - локальное определение $a + b = 5$ - вычисление

$b \equiv 1$ - глобальное определение

$\pi = 3.142$ $e = 2.718$ - встроенные переменные

Пример 2. Определение функций

$\cos(b) = 0.54$ - встроенная функция возвратила значение $\cos(1)=0.54$

$\text{pro}(x, y) := 2x \cdot y \cdot a$ - определение функции пользователя pro, здесь x и y - аргументы функции pro, a - параметр

$\text{pro}(5, 3.2) = 128$ - вычисление функции pro

Пример 3. Определение и использование дискретного аргумента

$z := 2, 2.5.. 4$ - переменная z принимает набор значений от 2 до 4 с шагом 0,5

$i := 0.. 3$ - здесь шаг по умолчанию равен 1, запись упростилась

$j := 0.. 2$

| | |
|-------|--|
| $z =$ | - для отображения значений переменной z необходимо набрать $z =$ |
| 2 | |
| 2.5 | |
| 3 | |
| 3.5 | |
| 4 | |

Press F1 for help. AUTO Page 1

Математические выражения

Дискретные аргументы

Дискретные аргументы – особый класс переменных, который в пакете Mathcad зачастую заменяет управляющие структуры, называемые циклами

(однако полноценной такая замена не является). Эти переменные имеют ряд фиксированных значений либо целочисленных, либо в виде чисел с определенным шагом, меняющихся от начального значения до конечного.

Дискретные аргументы значительно расширяют возможности Mathcad, позволяя выполнять многократные вычисления или циклы с повторяющимися вычислениями, формировать векторы и матрицы (см. пример 3 на рисунке).

Массивы

Массив – это названная уникальным именем совокупность конечного числа числовых или символьных элементов, упорядоченных некоторым образом и имеющих определенные адреса. В пакете Mathcad используются массивы двух наиболее распространенных типов: одномерные (векторы) и двумерные (матрицы).

Порядковый номер элемента, который является его адресом, называется индексом. Индексы могут иметь только целочисленные значения. Они могут начинаться с нуля или единицы в соответствии со значением системной переменной **ORIGIN**.

Векторы и матрицы можно задавать различными способами:

- с помощью команды **Math** → **Matrics**;
- с использованием дискретного аргумента (см. пример 3 на рисунке).

Текстовые фрагменты

Текстовые фрагменты представляют собой куски текста, которые пользователь хотел бы видеть в своем документе. Существуют два вида текстовых фрагментов – текстовая область (**region**) и текстовый диапазон (**band**). Текстовые области предназначены для небольших кусков текста – подписей, комментариев и т.п. Текстовые диапазоны применяются в том случае, если необходимо работать с абзацами или страницами.

Графические области

Графические области делятся на три основных типа - двумерные графики, трехмерные графики и импортированные графические образы. Двумерные и трехмерные графики строятся самим пакетом Mathcad на основании обработанных данных.

Создание анимационного клипа

Mathcad имеет встроенную переменную **FRAME**, чье единственное назначение – управление анимацией:

- Создайте объект, чей вид зависит от **FRAME**.
- Выберите **Windows** → **Animation** → **Create** для вызова диалогового окна.

- Заклучите в выделяющий пунктирный прямоугольник часть рабочего документа, которую нужно анимировать.
- Установите нижние и верхние границы **FRAME**.
- В поле **At (Темп)** введите значение скорости воспроизведения (кадр/сек).
- Выберите **Animate**. Сейчас анимация только создается.
- Сохраните анимацию как **AVI** файл (Save as).
- Воспроизведите сохраненную анимацию **Windows** → **Animation** → **Playback**.

Сообщения об ошибках

При выполнении вычислений возможны ошибки. Сообщение об ошибке в Mathcad выводится в красном прямоугольнике, от которого отходит линия, указывающая на место ошибки.

Порядок выполнения лабораторной работы 1

Задание 1. Вычислить:

$$\sqrt{100} = \quad ; \quad |-10| = \quad ; \quad 10! = \quad .$$

Это и все остальные задания снабдить комментариями, используя команды **Text** → **Create Text Region** или **Text** → **Create Text Paragraph**.

Задание 2. Определить переменные: $a := 3,4$; $b := 6,22$; $c \equiv 0,149$ (причем переменную c – глобально) и выражения:

$$Z := \frac{2ab + \sqrt[3]{c}}{\sqrt{(a^2 + b^{a+c})c}} ; \quad N := e^{\sin c} \cos \frac{a}{b} .$$

- вычислить выражения;
- С помощью команды **Math** → **Numerical Format** → **Displayed Precision** изменить точность отображения результатов вычисления *глобально*.

Задание 3. Вывести на экран значение *системной константы* π и установить максимальный формат ее отображения *локально*.

Задание 4. Выполнить следующие операции с комплексными числами:

$$Z := -3 + 2i, \quad |Z| = \quad , \quad \operatorname{Re}(Z) = \quad , \quad \operatorname{Im}(Z) = \quad , \quad \arg(Z) = \quad , \quad \sqrt{Z} = \quad ,$$
$$\sqrt{-5} = \quad , \quad 2Z = \quad .$$

$$Z1 := 1 + 2i, \quad Z2 := 3 + 4i, \quad Z1 + Z2 = \quad , \quad Z1Z2 = \quad , \quad Z1/Z2 = \quad .$$

Задание 5. Выполнить следующие операции:

$$i=1\dots 10, \sum_i i = \quad, \prod_i (i+1) = \quad, \int_0^{0,4} x^2 \lg(x+2) dx = \quad,$$

$$\int_{0,8}^{1,2} \frac{\operatorname{ctg} 2x}{(\sin 2x)^2} dx = \quad, x:=2, \frac{d}{dx} x^5 = \quad, \frac{d}{dx} \sin(x) = \quad.$$

Задание 6. Определить векторы d , S и R через дискретный аргумент i .

| i | d_i | S_i | R_i |
|-----|-------|-------|-------|
| 0 | 0,5 | 3,3 | 2,0 |
| 1 | 1,0 | 5,9 | 3,9 |
| 2 | 1,5 | 7,0 | 4,5 |
| 3 | 2,0 | 6,3 | 3,7 |
| 4 | 2,5 | 4,2 | 1,2 |

Отобразить графически таблично заданные функции $R_i(d_i)$ и $S_i(d_i)$, используя команду **Graphics** → **Create X-Y Plot**. Чтобы оформить график, необходимо выполнить следующие команды:

- Щелкнуть мышью на графике, чтобы выделить его, при этом Mathcad заменит меню **Graphics** на меню **X-Y Plot**.
- Выбрать **X-Y Plot** → **Format** (появится диалоговое окно "**Formatting Currently Selected X-Y Plot**") и отформатировать график так, чтобы в каждой узловой точке графика функции $S_i(d_i)$ стоял знак вида **(Traces** → **Symbol** → **box**), а график функции $R_i(d_i)$ отобразить в виде гистограммы (**Trace** → **type** → **bar**).
- Нанести линии сетки на график (**X-Y Axes** → **Grid Lines**) и отобразить легенду (**Traces** → **Hide Legend**).

Задание 7. Построить декартовы (**X-Y Plot**) и полярные (**Polar Plot**) графики следующих функций:

$$X(\alpha) := \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha), \quad Y(\alpha) := 1,5 \cos(\alpha)^2 - 1, \quad P(\alpha) := \cos(\alpha).$$

Для этого необходимо определить α как дискретный аргумент на интервале от 0 до 2π с шагом $\pi/30$.

Определить по графику **X-Y Plot** координаты любой из точек пересечения графиков $Y(\alpha)$ и $P(\alpha)$, для этого необходимо:

- Выделить график и выбрать **X-Y Plot** → **Zoom** (появится диалоговое окно "**X-Y Zoom**") для увеличения части графика в области точки пересечения.
- На чертеже выделить пунктирным прямоугольником окрестность точки пересечения графиков $Y(\alpha)$ и $P(\alpha)$, которую нужно увеличить.
- Нажать кнопку **Zoom**, чтобы перерисовать график.
- Чтобы сделать это изображение постоянным, выбрать **Accept**.
- Выбрать **X-Y Plot** → **Trace** (появится диалоговое окно "**X-Y Trace**").

- Внутри чертежа нажать кнопку мыши и переместить указатель мыши на точку, чьи координаты нужно увидеть.
 - Выбрать **Copy X** (или **Copy Y**), на свободном поле документа набрать $X_{per} :=$ (или $Y_{per} :=$) и выбрать пункт меню **Edit** → **Paste**.
- Вычислить значения функций $X(\alpha)$ и $Y(\alpha)$ при $\alpha := \pi/2$.

Задание 8. Используя команду **Math** → **Matrices**, создать матрицу Q размерами 6 на 6, заполнить ее произвольно и отобразить графически с помощью команды **Graphics** → **Create Surface Plot**.

Задание 9. Построить график поверхности (**Surface Plot**) и карту линий уровня (**Contour Plot**) для функции двух переменных:
 $X(t, \alpha) := t \cos \alpha \sin \alpha$.

- Определить функцию $X(t, \alpha)$.
- Задать на осях переменных t и α по 41 точке ($i:=0..40, j:=0..40$): для переменной t_i со значениями, изменяющимися от -5 до 5 с шагом $0,25$ ($t_j := -5 + 0,25 i$), а для переменной α_j – от 0 до 2π с шагом $\pi/20$ ($\alpha_j := \pi/20 j$).
- Определить матрицу $M_{i,j} := X(t_i, \alpha_j)$ и отобразить ее графически.

С помощью команды **Graphics** → **3D Plot Format** вызвать диалоговое окно "**3D Plot Format**" и изменить:

- характеристики просмотра (**View** → **Rotation, Tilt**),
- цвета и линии поверхности (**Color&Lines** → **Shading**),
- параметры осей (**Axes**),
- вид заголовка графика (**Title**).

Задание 10. Используя переменную **FRAME** и команду **Animation** → **Create**, создать анимационные клипы с помощью нижеприведенных данных.

Варианты задания 10

| Вариант | Переменная | Функция | FRAME | Тип графика |
|---------|--------------------------|--|------------|--|
| 1 | $x := 0,0.1..30$ | $f(x) := x + \text{FRAME}$ | От 0 до 20 | Полярный график (Polar Plot) |
| 2 | $i := 0..\text{FRAME}+1$ | $g_i := 0.5 i \cos(i)$ $h_i := i \sin(i)$ $k_i := 2 i$ | От 0 до 50 | Трехмерный точечный график (3D Scatter Plot); Границы на осях Min Max x -50 50 y -50 50 z 0 50 |

| Вариант | Переменная | Функция | FRAME | Тип графика |
|---------|--|---|------------|--|
| 3 | $i:=0..20$ $j:=0..20$ | $f(x,y):=\sin(x^2+y^2+FRAME)$ $x_i:=-1.5+0.15i$ $y_j:=-1.5+0.15j$ | От 0 до 50 | График поверхности (Surface Plot) |
| 4 | $r:= FRAME,$ $R := 6$ $m := 0..20$ $n := 0..20$ | $x_{m,n}:(R+r \cos(v_n)) \cos(w_m)$ $y_{m,n}:(R+r \cos(v_n)) \sin(w_m)$ $z_{m,n}:= r \sin(v_n)$ | От 0 до 11 | График параметрической поверхности (Surface Plot); Границы на всех осях установить от -11 до 11 |
| 5 | $r:= FRAME,$ $R := 6$ $m := 0..20$ $n := 0..20$ | $x_{m,n}:(R+r \cos(v_n)) \cos(w_m)$ $y_{m,n}:(R+r \cos(v_n)) \sin(w_m)$ $z_{m,n}:= r \sin(v_n)$ | От 0 до 11 | График параметрической поверхности (Surface Plot); Границы на всех осях установить от -11 до 11 |

Лабораторная работа 2 Решение уравнений

При математическом моделировании исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированной на языке математики. Всякий объект (система) изучения при своем функционировании подчиняется определенным законам (физическим, химическим, биологическим и т.п.). Знание этих законов предполагает, что известны количественные соотношения, связывающие те или иные характеристики моделируемого объекта (системы). Уравнения позволяют количественно описывать зависимости между различными физическими величинами, однако очень часто эта зависимость задана неявно и ее можно определить лишь решив это уравнение.

Новые знания об объекте возникают не только из экспериментального изучения реальных явлений, но и с помощью анализа математических формул. Каждое уравнение сориентировано на решение задач определенного типа.

Как известно, многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений (т.е. неалгебраических, например, тригонометрических, логарифмических, показательных). Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение степени выше четвертой. Однако такие уравнения могут решаться итерационными методами с заданной точностью.

Итерационные методы

Задача нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ итерационными методами состоит в следующем:

- *отделение корней* – отыскание приближенного значения корня (например графическим методом);
- *уточнение корней* – доведение их значений до заданной степени точности ε .

При использовании *метода Ньютона* необходимо задаться начальным приближением x_0 , расположенным достаточно близко к точному значению корня. Итерационный процесс строится по формуле

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad f'(x_i) \neq 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

Метод *простых итераций* решения уравнения $f(x) = 0$ состоит в замене исходного уравнения эквивалентным ему уравнением $x = j(x)$ и построении итерационной последовательности по формуле

$$x_{i+1} = j(x_i), \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

Достаточным условием сходимости рассмотренных итерационных процессов является выполнение неравенства

$$|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon \quad (2.3)$$

на каждом шаге итерации.

Функция *until* (a, z) возвращает z , пока выражение a не становится отрицательным; a должно содержать дискретный аргумент. Рис. 2.1 иллюстрирует использование функции *until* для реализации метода Ньютона.

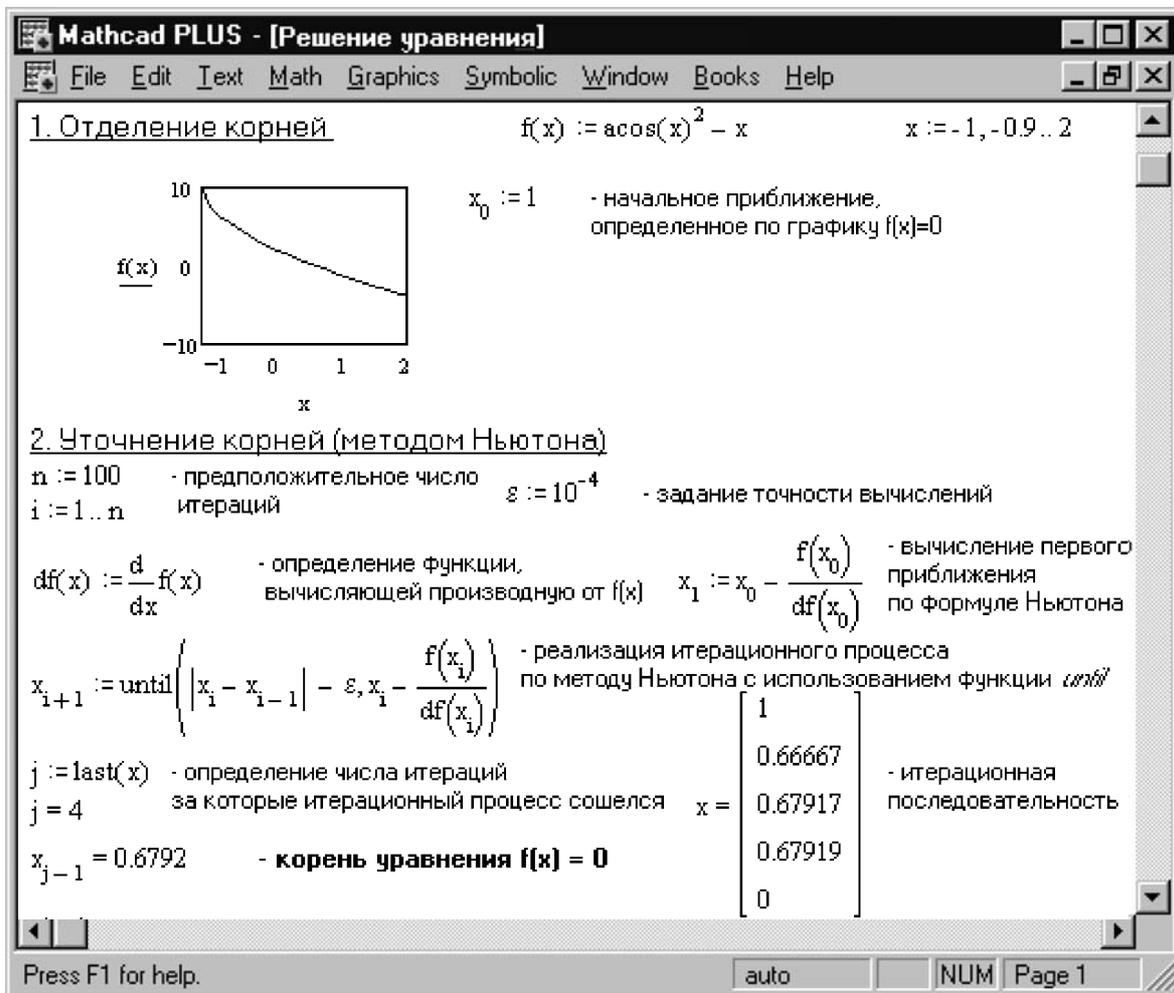


Рис. 2.1. Использование функции *until* для реализации метода Ньютона

Предупреждение: Функция *until* считается устаревшей и в версиях Mathcad, начиная с 2000 года, не поддерживается.

Решение уравнений средствами Mathcad

Для простейших уравнений вида $f(x) = 0$ решение находится с помощью функции *root*.

| | |
|------------------------|--|
| $\text{root}(f(z), z)$ | Возвращает значение z , при котором выражение или функция $f(z)$ обращаются в 0. Оба аргумента этой функции должны быть скалярами. Функция возвращает скаляр |
|------------------------|--|

Первый аргумент – это или функция, определенная где-либо в рабочем документе, или выражение. Второй аргумент – имя переменной, которая используется в выражении. Этой переменной перед использованием функции *root* необходимо присвоить числовое значение.

Для нахождения корней выражения, имеющего вид

$$v_n x^n + \dots + v_2 x^2 + v_1 x + v_0,$$

лучше использовать функцию *polyroots* нежели *root*. В отличие от функции *root* функция *polyroots* не требует начального приближения и возвращает сразу все корни как вещественные, так и комплексные.

| | |
|--------------------------------|---|
| $\text{polyroots}(\mathbf{v})$ | Возвращает корни полинома степени n . Коэффициенты полинома находятся в векторе \mathbf{v} длины $n + 1$. Возвращает вектор длины n , состоящий из корней полинома |
|--------------------------------|---|

Системы линейных уравнений удобно решать с помощью функции *lsolve*.

| | |
|---|--|
| $\text{lsolve}(\mathbf{M}, \mathbf{v})$ | Возвращается вектор решения \mathbf{z} такой, что $\mathbf{M} \mathbf{z} = \mathbf{v}$. |
|---|--|

При решении систем уравнений используется специальный вычислительный блок, открываемый служебным словом *Given* (Дано) и оканчивающийся выражением с функциями *Find* или *Minerr*.

| | |
|----------------------------------|---|
| $\text{Find}(z_1, z_2, \dots)$ | Возвращает точное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных |
| $\text{Minerr}(z_1, z_2, \dots)$ | Возвращает приближенное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных |

Пример 1 на рис. 2.2 иллюстрирует решение системы уравнений с помощью вычислительного блока *Given ... Find*.

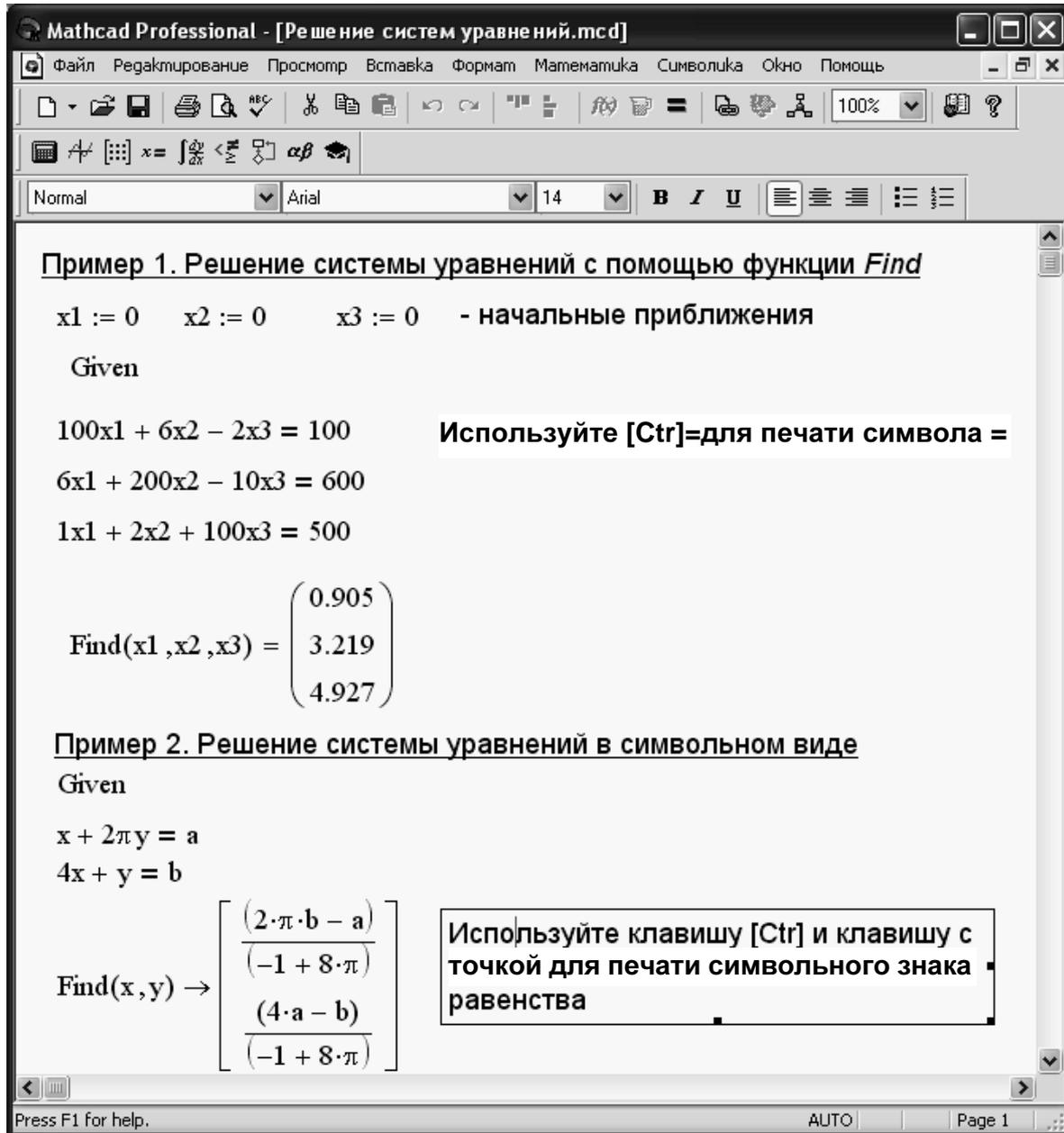


Рис. 2.2. Решение систем уравнений

Символьное решение уравнений и систем уравнений

Если задано некоторое выражение $f(x)$ и отмечена переменная x , то команда **Symbolic** → **Solve for Variable** (**Решить относительно переменной**) возвращает символьные значения указанной переменной x , при которой $f(x) = 0$.

Если вы работаете с пакетом Mathcad, то сможете решать символично не только уравнения, но и системы уравнений. Чтобы решить систему уравнений в символическом виде, не нужно задавать начальные приближения. Пример 2 (см. рис. 2.2) показывает символическое решение системы уравнений.

Порядок выполнения лабораторной работы 2

Задание 1. Построить график функции $f(x)$ и приблизительно определить один из корней уравнения.

Решить уравнение $f(x) = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$:

- с помощью встроенной функции Mathcad *root*;
- методом Ньютона (касательных), используя функцию *until*;
- методом итераций, используя функцию *until*.

Определить число итераций в каждом методе с помощью функции *last*.

Варианты задания 1

| Вариант | $f(x)$ | Вариант | $f(x)$ |
|----------|---|-----------|---|
| 1 | $3\sin(\sqrt{x}) + 0,35x - 3,8$ $x \in [2; 3]$ | 9 | $e^x - e^{-x} - 2$ $x \in [0; 1]$ |
| 2 | $x - \frac{1}{3 + \sin(3,6x)}$ $x \in [0; 1]$ | 10 | $\sqrt{1-x} - \operatorname{tg}x$ $x \in [0; 1]$ |
| 3 | $\arccos x - \sqrt{1 - 0,3x^3}$ $x \in [0; 1]$ | 11 | $\sqrt{2x^2 + 1,2 - \cos x} - 1$ $x \in [0; 1]$ |
| 4 | $\sqrt{1 - 0,4x^2} - \arcsin x$ $x \in [0; 1]$ | 12 | $\cos(2/x) - 2\sin(1/x) + 1/x$ $x \in [1; 2]$ |
| 5 | $3x - 14 + e^x - e^{-x}$ $x \in [1; 3]$ | 13 | $0,1x^2 - x \ln x$ $x \in [1; 2]$ |
| 6 | $0,25x^3 + x - 2$ $x \in [0; 2]$ | 14 | $1 - x + \sin x - \ln(1 + x)$ $x \in [0; 2]$ |
| 7 | $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - x$ $x \in [2; 3]$ | 15 | $e^{x-1} - x^3 - x$ $x \in [0; 1]$ |
| 8 | $3x - 4\ln x - 5$ $x \in [2; 4]$ | 16 | $5\cos(\sqrt{x}) + 0,95x - 2,1$ $x \in [2; 3]$ |

Задание 2. Для полинома $g(x)$ выполнить следующие действия:

- с помощью команды **Symbolic** → **Polynomial Coefficients** создать вектор \mathbf{v} , содержащий коэффициенты полинома;
- решить уравнение $g(x) = 0$ с помощью функции *polyroots*;
- решить уравнение символично, используя команду **Symbolic** → **Solve for Variable**;
- разложить на множители, используя **Symbolic** → **Factor Expression**.

Варианты задания 2

| Вариант | $g(x)$ | Вариант | $g(x)$ |
|----------|----------------------------------|-----------|----------------------------------|
| 1 | $x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x + 20$ | 9 | $x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 100$ |
| 2 | $x^4 - 6x^3 + x^2 - 4x - 60$ | 10 | $x^4 - 5x^3 + x^2 - 15x + 50$ |
| 3 | $x^4 - 14x^2 - 40x - 60$ | 11 | $x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 20x + 25$ |
| 4 | $x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 10$ | 12 | $x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20$ |
| 5 | $x^4 - x^3 - 29x^2 - 71x + 30$ | 13 | $x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 5x + 100$ |
| 6 | $x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 13x - 30$ | 14 | $x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 70x + 75$ |
| 7 | $x^4 - 3x^3 - 23x^2 - 55x - 150$ | 15 | $x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x + 60$ |
| 8 | $x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 10x + 75$ | 16 | $x^4 - 6x^3 + x^2 + 41x + 80$ |

Задание 3. Решить систему линейных уравнений:

- используя функции *Find*;
- матричным способом, используя функцию *lsolve*.

Варианты задания 3

| Вариант | Система линейных уравнений | Вариант | Система линейных уравнений |
|----------|---|----------|--|
| 1 | $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$ | 3 | $\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = 23 \\ 7x_1 - x_3 - 5x_4 = 37 \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 22 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$ |
| 2 | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$ | 4 | $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \end{cases}$ |

Лабораторная работа 2. Решение уравнений

| Вариант | Система линейных уравнений | Вариант | Система линейных уравнений |
|-----------|--|-----------|--|
| 5 | $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 88 \\ 5x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 88 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 181 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 99 \end{cases}$ | 11 | $\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -18 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 28 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 11x_1 + x_3 + 2x_4 = 21 \end{cases}$ |
| 6 | $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 8x_4 = 26 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -8 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 7 \end{cases}$ | 12 | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 66 \\ x_2 - 6x_3 + x_4 = -63 \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 146 \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 80 \end{cases}$ |
| 7 | $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 15 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 37 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 30 \end{cases}$ | 13 | $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 + 2x_4 = -16 \\ 2x_1 - x_2 + 13x_3 + 4x_4 = 213 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 72 \\ x_1 - 2x_3 - 5x_4 = -159 \end{cases}$ |
| 8 | $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 165 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ 9x_1 - 4x_3 - x_4 = 194 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -19 \end{cases}$ | 14 | $\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$ |
| 9 | $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -7 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -2 \end{cases}$ | 15 | $\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = 124 \\ 7x_2 - 5x_3 - x_4 = -54 \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 83 \\ 3x_1 - 9x_2 + x_3 + 6x_4 = 45 \end{cases}$ |
| 10 | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$ | 16 | $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 8x_4 = 26 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 6x_4 = -8 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -13 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 7 \end{cases}$ |

Задание 4. Преобразовать нелинейные уравнения системы к виду $f_1(x) = y, f_2(y) = x$. Построить их графики и определить начальное приближение решения. Решить систему нелинейных уравнений, используя функцию *Minerr*.

Варианты задания 4

| Вариант | Система нелинейных уравнений | Вариант | Система нелинейных уравнений |
|----------|---|-----------|--|
| 1 | $\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y - 1) + x = 0,7 \end{cases}$ | 9 | $\begin{cases} \sin y + x = -0,4 \\ 2y - \cos(x + 1) = 0 \end{cases}$ |
| 2 | $\begin{cases} \sin(x + 0,5) - y = 1 \\ \cos(y - 2) + x = 0 \end{cases}$ | 10 | $\begin{cases} \sin(x + 2) - y = 1,5 \\ \cos(y - 2) + x = 0,5 \end{cases}$ |
| 3 | $\begin{cases} \cos x + y = 1,5 \\ 2x - \sin(y - 0,5) = 1 \end{cases}$ | 11 | $\begin{cases} \cos(x + 0,5) - y = 2 \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$ |
| 4 | $\begin{cases} \cos(x + 0,5) + y = 0,8 \\ \sin y - 2x = 1,6 \end{cases}$ | 12 | $\begin{cases} \cos(x - 2) + y = 0 \\ \sin(y + 0,5) - x = 1 \end{cases}$ |
| 5 | $\begin{cases} \sin(x - 1) = 1,3 - y \\ x \sin(y + 1) = 0,8 \end{cases}$ | 13 | $\begin{cases} \cos(x + 0,5) + y = 1 \\ \sin(y + 0,5) - x = 1 \end{cases}$ |
| 6 | $\begin{cases} \cos(x + 0,5) - y = 2 \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$ | 14 | $\begin{cases} \sin(x) - 2y = 1 \\ \cos(y + 0,5) - x = 2 \end{cases}$ |
| 7 | $\begin{cases} -\sin(x + 1) + y = 0,8 \\ \sin(y - 1) + x = 1,3 \end{cases}$ | 15 | $\begin{cases} 2y - \sin(x - 0,5) = 1 \\ \cos(y) + x = 1,5 \end{cases}$ |
| 8 | $\begin{cases} \sin(x) - 2y = 1 \\ \sin(y - 1) + x = 1,3 \end{cases}$ | 16 | $\begin{cases} \cos(x + 0,5) - y = 0,8 \\ \sin(y - 2) + x = 1 \end{cases}$ |

Задание 5. Символьно решить системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 4\pi y = a \\ 2x + y = b \end{cases} \quad \begin{cases} 2y - \pi z = a \\ \pi z - z = b \\ 3y + x = c \end{cases}$$

Лабораторная работа 3 Обработка табличных данных

В практической работе часто бывает так, что зависимость между переменными величинами, например x и y , получается в результате опыта или измерений. Обычно в таком случае эта зависимость оказывается заданной при помощи таблицы, в которой для каждого значения x , при котором проводилось измерение, поставлено соответствующее, найденное путем измерения значения y . Функции, заданные таким образом, могут входить в дальнейшие операции и, например, может возникнуть потребность в их дифференцировании или интегрировании. Кроме этого существуют задачи, в которых необходимы значения функции при промежуточных, не вписанных в таблице, значениях независимой переменной (задача интерполяции) или при значениях независимой переменной, лежащих за пределами таблицы (задача экстраполяции).

Интерполяция и аппроксимация являются базой для решения задач обработки табличных данных.

Интерполяция

Решение задачи сводится к приближенной замене заданной функции $f(x)$ некоторой функцией $\varphi(x)$ так, чтобы отклонение функции $\varphi(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим.

Необходимость *интерполяции* функций в основном связана с двумя причинами:

1. Функция $f(x)$ имеет сложное аналитическое описание, вызывающее определенные трудности при его использовании (например $f(x)$ является спецфункцией: гамма-функцией, эллиптической функцией и др.).
2. Аналитическое описание функции $f(x)$ неизвестно, т.е. $f(x)$ задана таблично. При этом необходимо иметь аналитическое описание приближенно представляющее $f(x)$ (например для вычисления: значений $f(x)$ в произвольных точках, определения интегралов и производных от $f(x)$ и т. п.).

Простейшая задача *интерполяции* заключается в следующем. Для заданных $n + 1$ точек $x_i = x_0, x_1, \dots, x_n$, которые называются *узлами интерполяции*, и значений в этих точках некоторой функции $f(x_i) = y_0, y_1, \dots, y_n$

построить полином $\varphi(x)$ (интерполяционный полином) степени n вида

$$\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (3.1)$$

принимающий в узлах интерполяции x_i те же значения y_i , что и функция $f(x_i)$:

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi(x_1) = y_1, \dots, \varphi(x_n) = y_n; \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Глобальная интерполяция

Простейшим видом *глобальной интерполяции* является *параболическая интерполяция*, когда, используя описанные выше условия (3.2), для отыскания неизвестных $n + 1$ коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n выражения (3.1) получают систему из $n + 1$ уравнений:

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \dots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases} \quad (3.3)$$

Интерполяционная формула Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (3.4)$$

Для построения *интерполяционной формулы Лагранжа* в Mathcad удобно использовать функцию *if*.

| | |
|------------------------|--|
| $if(cond, tval, fval)$ | Возвращает значение <i>tval</i> , если <i>cond</i> отличен от 0 (истина). Возвращает значение <i>fval</i> , если <i>cond</i> равен 0 (ложь) |
|------------------------|--|

Часто интерполирование ведется для функций, заданных таблично с *равноотстоящими* значениями аргумента ($h_i = x_{i+1} - x_i = const$). Введем предварительно понятие *конечных разностей*:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1; \\ \Delta^2 y_i &= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 2; \\ \Delta^k y_i &= \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - k. \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений *первая интерполяционная формула Ньютона* имеет вид:

$$P_{n1}(x) = P_{n1}(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t!}{(t-n)!n!} \Delta^n y_0, \quad (3.5)$$

где $t = \frac{x - x_0}{h}$.

Вторая интерполяционная формула имеет вид:

$$P_{n2}(x) = P_{n2}(x_0 + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t!}{(t-n)!n!} \Delta^n y_0, \quad (3.6)$$

где $t = \frac{x - x_n}{h}$.

Однако интерполяция при большом числе узлов приводит к необходимости работать с многочленами высокой степени (например 50-й или даже 100-й), что неприемлемо как с точки зрения вычислений, так и из-за склонности таких многочленов к осцилляции (колебаниям) между узлами сетки. Поэтому на практике часто используют интерполяцию кусочными многочленами (или *локальную интерполяцию*).

Локальная интерполяция

При *локальной* интерполяции между различными узлами выбираются различные многочлены невысокой степени. В среде Mathcad есть для этого инструментарий: средства *линейной интерполяции* (функция *linterp*) и *интерполяции сплайном* (функция *interp*) линейным (*lspline*), параболическим (*pspline*) и кубическим (*cspline*). Рис. 3.1 показывает некоторые примеры локальной интерполяции.

| | |
|--|---|
| <code>linterp(vx, vy, x)</code> | Использует векторы данных vx и vy, чтобы возвратить линейно интерполируемое значение y, соответствующее третьему аргументу x. |
| <code>lspline(vx, vy)</code> <code>pspline(vx, vy)</code> <code>cspline(vx, vy)</code> | Все эти функции возвращают вектор коэффициентов вторых производных, который мы будем называть vs. Вектор vs, используется в функции <i>interp</i> |
| <code>interp(vs, vx, vy, x)</code> | Возвращает интерполируемое значение y, соответствующее аргументу x. |

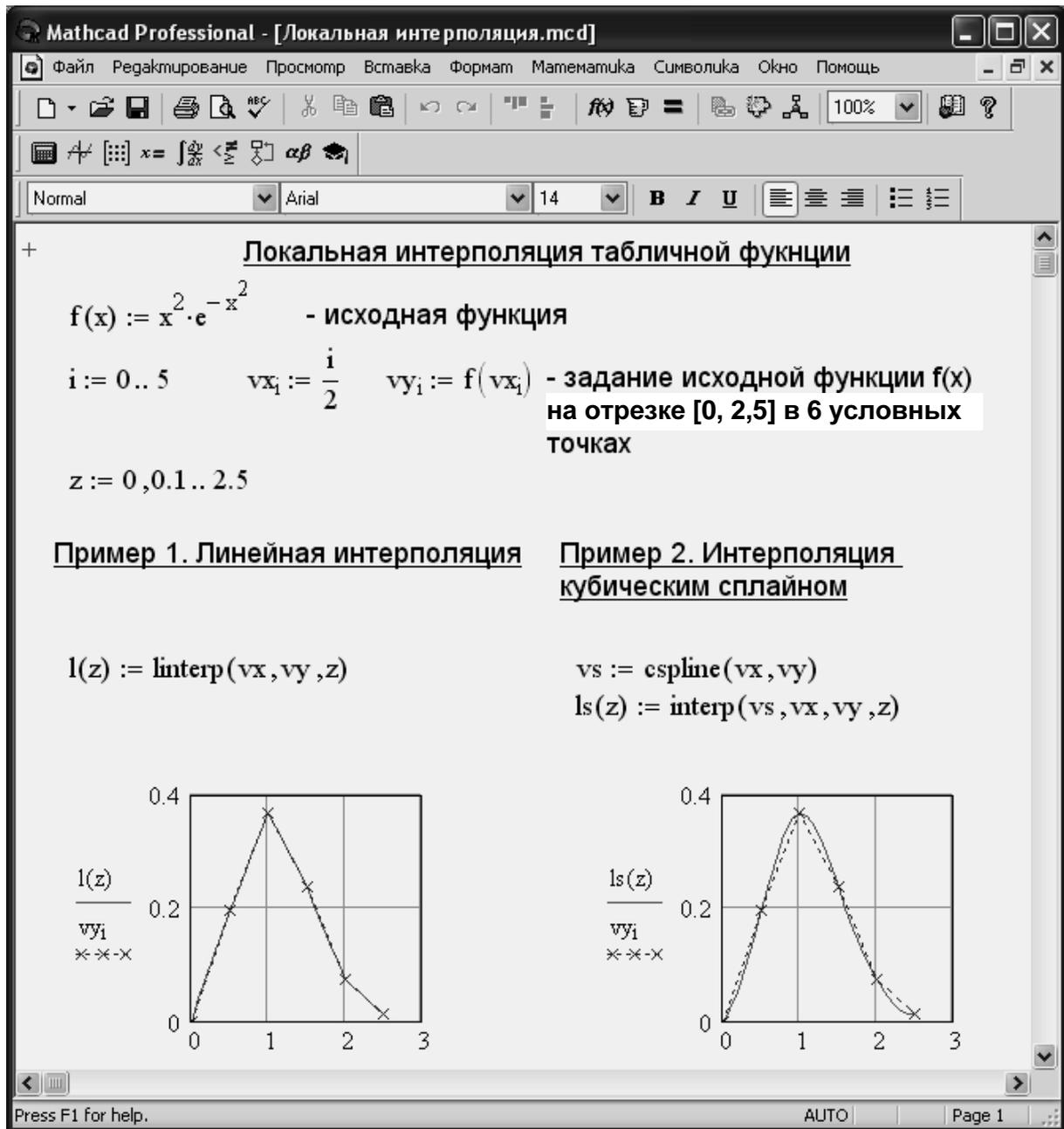


Рис. 3.1. Локальная интерполяция

Предсказание

Если необходимо оценить значения функции в точках не принадлежащих отрезку $[x_0, x_n]$, используйте функцию *predict* (рис. 3.2).

| | |
|---------------------------|--|
| $\text{predict}(v, m, n)$ | Возвращает n предсказанных значений, основанных на m последовательных значениях вектора данных v |
|---------------------------|--|

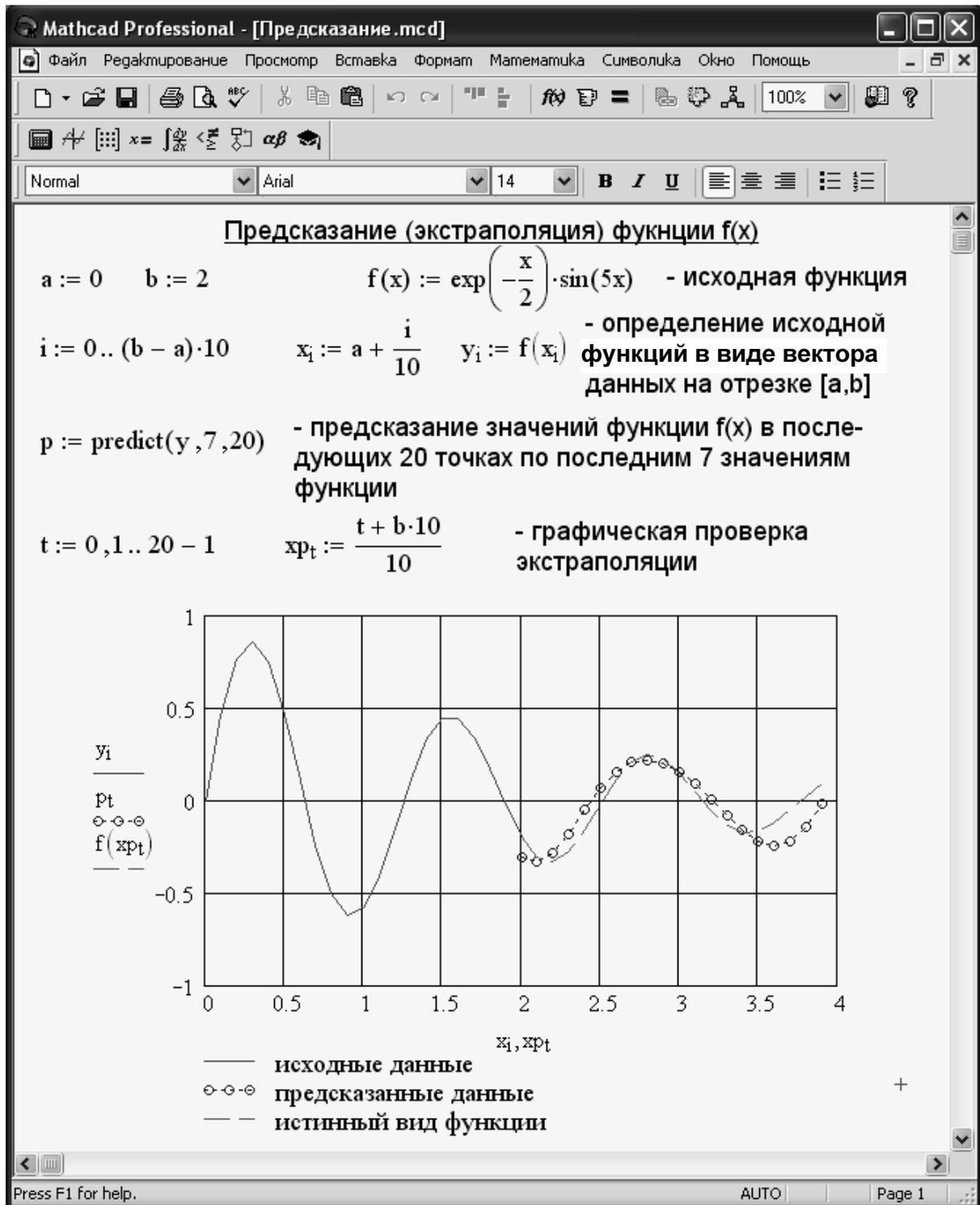


Рис. 3.2. Экстраполяция функций

Порядок выполнения лабораторной работы

Задание 1. Вычислить значения заданной функции $y_i = f(x_i)$ в узлах интерполяции $x_i = a + h i$, где $h = \frac{(b-a)}{10}$, $i = 0, 1, \dots, 10$, на отрезке $[a, b]$.

Варианты задания 1

| Вариант | $f(x)$ | $[a, b]$ | Вариант | $f(x)$ | $[a, b]$ |
|----------|------------------------|----------|-----------|--------------------------|----------|
| 1 | $\sin x^2$ | [0, 2] | 9 | $x \cos(x + \ln(1 + x))$ | [1, 5] |
| 2 | $\cos x^2$ | [0, 2] | 10 | $10 \ln 2x / (1 + x)$ | [1, 5] |
| 3 | $e^{\sin x}$ | [0, 5] | 11 | $\sin x^2 e^{-(x/2)^2}$ | [0, 3] |
| 4 | $1 / (0.5 + x^2)$ | [0, 2] | 12 | $\cos(x + \cos^3 x)$ | [0, 2] |
| 5 | $e^{-(x + \sin x)}$ | [2, 5] | 13 | $\cos(x + e^{\cos x})$ | [3, 6] |
| 6 | $1 / (1 + x^2)$ | [0, 4] | 14 | $\cos(2x + x^2)$ | [0, 1] |
| 7 | $\sin(x + e^{\sin x})$ | [0, 3] | 15 | $e^{\cos x^2} \cos x^2$ | [0, 2] |
| 8 | $e^{-(x + 1/x)}$ | [1, 3] | 16 | $\ln(1 + x)$ | [0, 1] |

Задание 2. По вычисленной таблице (x_i, y_i) провести *параболическую интерполяцию*. Для нахождения коэффициентов искомого полинома (3.1) необходимо составить систему линейных алгебраических уравнений (3.3). Систему уравнений решить матрично с использованием функции *lsolve*. Построить график интерполяционного многочлена и отметить на нем узловые точки (x_i, y_i) .

Задание 3. Для вычисленной табличной функции составить формулу интерполяционного многочлена *Лагранжа*, используя операторы суммирования и перемножения по дискретному аргументу, а также функцию *if*. Построить график интерполяционного многочлена и отметить на нем узловые точки (x_i, y_i) .

Задание 4. Провести интерполирование заданной функции с помощью 1-й и 2-й интерполяционных формул *Ньютона*. Построить графики интерполяционных многочленов и отметить их узловые точки (x_i, y_i) .

Задание 5. Провести *линейную интерполяцию* заданной функции с помощью встроенной интерполяционной функции *linterp*. Построить график функции *linterp* и отметить на нем узловые точки (x_i, y_i) .

Задание 6. Провести *сплайн-интерполяцию* с помощью функций *lspline*, *pspline*, *cspline* и *interp*. Построить график функции *interp* и отметить на нем узловые точки (x_i, y_i) .

Задание 7. Вычислить значения заданной функции $y_i = f(x_i)$ в точках $x_i = a + \frac{i}{10}$, где $i = 0, 1, \dots, 10$ ($b - a$) на отрезке $[a, b]$. С использованием функции *predict* выполнить *предсказание (экстраполяцию)* полученного вектора данных y_i в последующих 10 точках по последним 7 значениям функции. Отобразить графически имеющиеся данные, предсказанные данные и истинный вид функции $f(x)$.

Лабораторная работа 4

Математическая обработка экспериментальных данных

Одна из самых распространенных задач в науке и технике – это аппроксимация экспериментальных данных аналитическими выражениями. Для исследователя возможность подобрать параметры уравнения таким образом, чтобы его решение совпадало с данными эксперимента, зачастую является доказательством (или опровержением) теории. Инженерам же часто требуется описать результаты измерений аналитически для определения физических параметров.

Кроме этого в практике исследовательской работы имеет место ситуация, когда важнейшие переменные, описывающие некоторый процесс, известны, а зависимость между ними – нет. В таких случаях проводят регрессионный анализ и получают искомую функциональную зависимость.

Аппроксимация

Изучая в лабораторной работе № 3 теорию интерполяции, вы познакомились с интерполяционными формулами, которые в точности воспроизводят значения данной функции в узлах интерполяции. Однако в ряде случаев выполнение этого условия затруднительно или даже нецелесообразно:

1. Если заданные величины x и y являются экспериментальными данными, то могут содержать в себе существенные ошибки, так как получены в результате измерений или наблюдений. Поэтому построение аппроксимирующего многочлена, воспроизводящего в точности заданное значение функции, означало бы тщательное копирование допущенных при измерениях ошибок.

2. Если имеются точные значения функции в некоторых точках, но число таких точек n весьма велико, то интерполяционный многочлен будет очень высокой степени (при условии, что разности не будут постоянными).

Поэтому возникает *задача аппроксимации* – построения многочлена некоторой вполне определенной степени, но меньшей чем $n - 1$, который хотя и не дает точных значений функции в узлах интерполяции, но достаточно близко к ним подходит.

Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (МНК) состоит в следующем: для данных значений $x_i = x_0, x_1, \dots, x_n$ и $y = y_0, y_1, \dots, y_n$ подобрать многочлен заданной степени $m < n$ вида

$$\varphi(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (4.1)$$

принимаящий в заданных точках x_i значения как можно более близкие к табличным значениям y_i . Коэффициенты a_i многочлена (4.1) находят из решения системы

$$\begin{cases} b_{00}a_0 + b_{01}a_1 + \dots + b_{0m}a_m = c_0 \\ b_{10}a_0 + b_{11}a_1 + \dots + b_{1m}a_m = c_1 \\ \dots \\ b_{m0}a_0 + b_{m1}a_1 + \dots + b_{mm}a_m = c_m, \end{cases} \quad (4.2)$$

где $b_{k,l} = \sum_{i=0}^n x_i^{k+l}$, $c_k = \sum_{i=0}^n x_i^k y_i$, $k, l = 0, 1, \dots, m$.

Регрессионный анализ

Пусть имеются два ряда чисел $x_i = x_0, x_1, \dots, x_n$ и $y = y_0, y_1, \dots, y_n$, при этом предполагается, что ряд y каким-либо образом зависит от ряда x . Задача регрессионного анализа состоит в восстановлении математической зависимости (регрессии) $y(x)$ по результатам измерений (x_i, y_i) .

Mathcad включает ряд функций для вычисления регрессии. Функции отличаются прежде всего типом кривой, которую они используют, чтобы аппроксимировать данные.

Линейная регрессия

Встроенные функции *intercept* (to intercept – отложить отрезок на линии) и *slope* (наклон) решают самую простую и распространенную задачу линейной регрессии экспериментальных данных:

$$f(x) = slope(vx, vy) x + intercept(vx, vy).$$

| | |
|---------------------|--|
| $slope(vx, vy)$ | Возвращает скаляр: наклон линии для данных из vx и vy |
| $intercept(vx, vy)$ | Возвращает скаляр: смещение по оси ординат линии регрессии для данных из vx и vy |

Полиномиальная регрессия

Используйте функцию *regress*, когда нужно получить единственный полином произвольной степени, чтобы приблизить все данные. Не рекомендуется принимать степень аппроксимирующего полинома выше 4...6, поскольку погрешности реализации регрессии сильно возрастают.

| | |
|-----------------------------|---|
| $\text{regress}(vx, vy, n)$ | Возвращает вектор <i>vs</i> , требуемый <i>interp</i> , чтобы найти полином порядка <i>n</i> , который наилучшим образом приближает данные из <i>vx</i> и <i>vy</i> |
|-----------------------------|---|

Пример 1 (рис. 4.1) иллюстрирует использование функции *regress*. Так как *regress* приближает все точки данных, используя один полином, это не дает хороший результат, когда данные не связаны единой полиномиальной зависимостью.

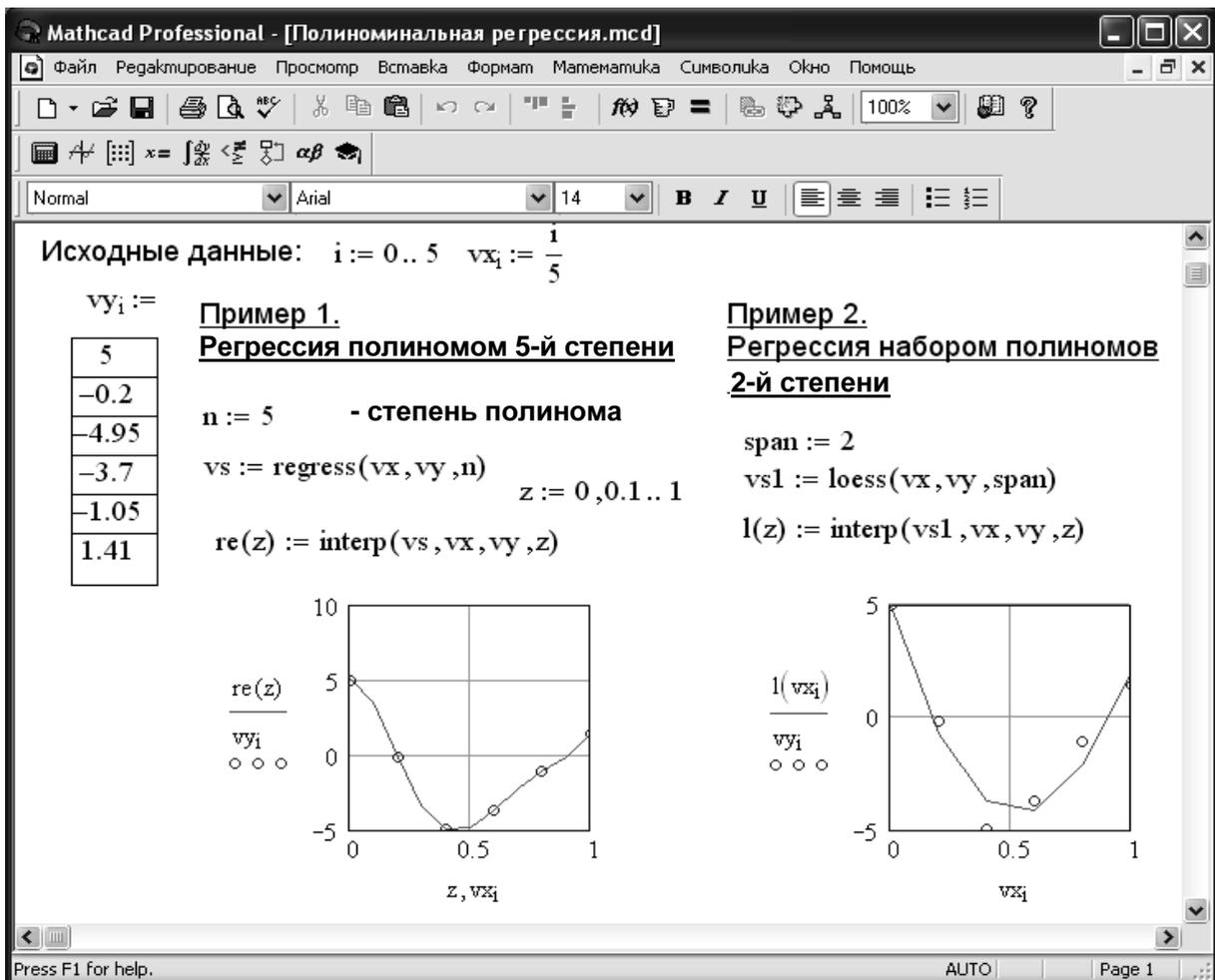


Рис. 4.1. Полиномиальная регрессия

Функция *loess* облегчает эти проблемы, выполняя локальное приближение. Вместо одного полинома *loess* создает различные полиномы второго порядка в зависимости от расположения на кривой (см. пример 2 рис. 4.1).

| | |
|----------------------------|---|
| <i>loess(vx, vy, span)</i> | Возвращает вектор <i>vs</i> , требуемый <i>interp</i> , чтобы найти набор полиномов второго порядка, которые наилучшим образом приближают определенные окрестности выборочных точек, определенных в векторах <i>vx</i> и <i>vy</i> . Аргумент <i>span</i> > 0 определяет, насколько большие окрестности <i>loess</i> будет использовать при выполнении локального приближения |
|----------------------------|---|

Обобщенная регрессия

Линейная или полиномиальная регрессия не во всех случаях подходят для описания зависимости данных. Бывает, что нужно искать эту зависимость в виде линейных комбинаций произвольных функций, ни одна из которых не является полиномом. Если предполагается, что данные могли бы быть смоделированы в виде линейной комбинации произвольных функций

$$f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \dots + a_n f_n(x),$$

следует использовать *linfit*, чтобы вычислить a_i . Это так называемая *линейная регрессия общего вида* (см. пример 1, рис. 4.2).

| | |
|--------------------------|---|
| <i>linfit(vx, vy, F)</i> | Возвращает вектор коэффициентов линейной регрессии общего вида, чтобы создать линейную комбинацию функций из <i>F</i> , дающую наилучшую аппроксимацию данных из векторов <i>vx</i> и <i>vy</i> . <i>F</i> – функция-вектор, состоящая из функций, которые нужно объединить в виде линейной регрессии |
|--------------------------|---|

Если данные должны быть смоделированы в виде $f(x) = f(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$, нужно использовать функцию *genfit*, чтобы найти неизвестные параметры u_i . Это *нелинейная регрессия общего вида* (см. пример 2, рис. 4.2).

| | |
|------------------------------|--|
| <i>genfit(vx, vy, vg, F)</i> | Возвращает вектор n параметров u_0, u_1, \dots, u_{n-1} , которые обеспечивают наилучшее приближение данных из <i>vx</i> и <i>vy</i> функцией f , зависящей от x и параметров u_0, u_1, \dots, u_{n-1} . <i>F</i> – функция-вектор, состоящая из f и ее частных производных (здесь-то и пригодятся средства символьной математики) относительно параметров. <i>vg</i> – n -мерный вектор начальных значений для n параметров |
|------------------------------|--|

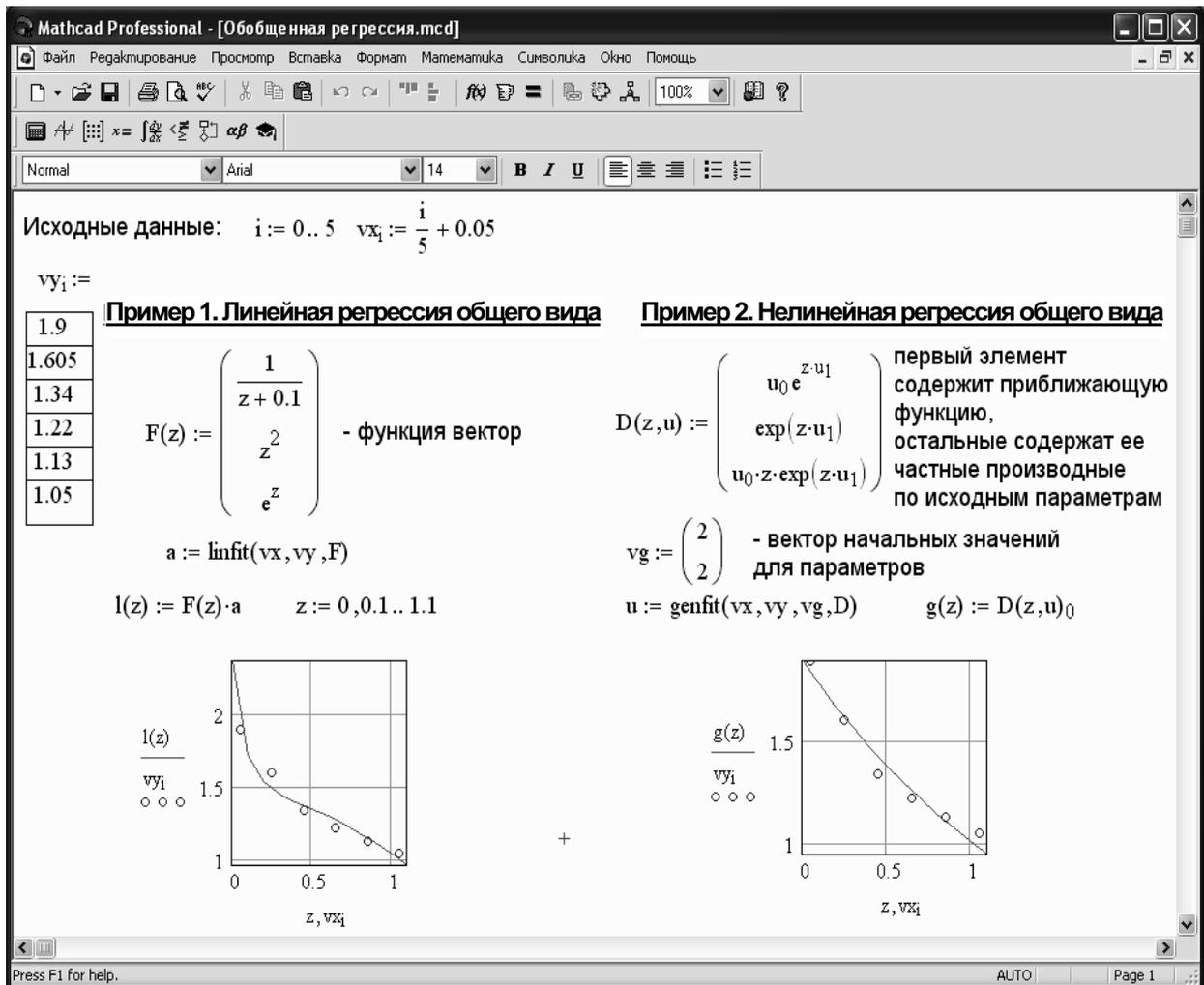


Рис. 4.2. Обобщенная регрессия

Сглаживание

Сглаживание предполагает использование исходного набора значений y (и возможно x) и возвращение нового набора значений y , который является более гладким, чем исходный набор. В отличие от регрессии и интерполяции сглаживание приводит к новому набору значений y , а не к функции, которая может оценивать значения между заданными точками данных.

| | |
|----------------------|---|
| $ksmooth(vx, vy, b)$ | Возвращает n -мерный вектор, созданный сглаживанием при помощи гауссова ядра данных из n -мерного вектора vy . Параметр b управляет окном сглаживания и должен быть в несколько раз больше величины интервала между точками x |
|----------------------|---|

| | |
|-----------------------|---|
| medsmooth(vy, m) | Возвращает n -мерный вектор, созданный сглаживанием n -мерного вектора vy с помощью скользящей медианы. m – ширина окна, по которому происходит сглаживание, причем m должно быть нечетным числом и $m < n$ |
| supsmooth(vx, vy) | Возвращает n -мерный вектор, созданный локальным использованием симметричной линейной процедуры сглаживания МНК |

Порядок выполнения лабораторной работы

Задание 1. Создайте таблицу экспериментальных данных:
 $x_i = a + h i, i = 0, 1, \dots, 10, h = (b - a)/10$ на отрезке $[a, b]$.

Варианты задания 1

| Вариант | y_i | $[a, b]$ |
|---------|--|----------|
| 1 | 2.86; 2.21; 2.96; 3.27; 3.58; 3.76; 3.93; 3.67; 3.90; 3.64; 4.09 | [0, 1] |
| 2 | 1.14; 1.02; 1.64; 1.64; 1.96; 2.17; 2.64; 3.25; 3.47; 3.89; 3.36 | [-1, 1] |
| 3 | 4.70; 4.64; 4.57; 4.45; 4.40; 4.34; 4.27; 4.37; 4.42; 4.50; 4.62 | [2, 4] |
| 4 | 0.43; 0.99; 2.07; 2.54; 1.67; 1.29; 1.24; 0.66; 0.43; 0.35; 0.70 | [2, 4] |
| 5 | 1.55; 1.97; 1.29; 0.94; 0.88; 0.09; 0.02; 0.84; 0.81; 0.09; 0.15 | [1, 4] |
| 6 | 3.24; 1.72; 1.95; 2.77; 2.47; 0.97; 1.75; 1.55; 0.12; 0.70; 1.19 | [0, 4] |
| 7 | 2.56; 1.92; 2.85; 2.94; 2.39; 2.16; 2.51; 2.10; 1.77; 2.28; 1.70 | [-1, 2] |
| 8 | 1.77; 0.92; 2.21; 1.50; 3.21; 3.46; 3.70; 4.02; 4.36; 4.82; 4.03 | [-1, 3] |
| 9 | 1.53; 0.45; 1.68; 0.12; 0.68; 2.36; 2.58; 2.53; 3.45; 2.70; 2.82 | [4, 8] |
| 10 | 2.50; 3.90; 3.54; 4.63; 3.87; 5.25; 4.83; 3.24; 3.08; 3.00; 4.70 | [0, 5] |
| 11 | 2.95; 3.38; 2.71; 2.37; 2.29; 2.75; 2.76; 2.74; 2.57; 2.40; 2.99 | [1, 5] |
| 12 | -0.23; -0.03; -0.98; -0.97; -0.43; -0.91; -0.27; -0.19; 0.88; 1.06; 0.72 | [2, 4] |
| 13 | 2.36; 0.03; -0.38; -1.33; 0.25; -1.36; 0.95; 3.16; 4.03; 4.92; 4.20 | [0, 2] |
| 14 | 3.82; 4.07; 3.53; 4.83; 5.53; 5.04; 5.09; 5.87; 5.53; 4.72; 4.73 | [3, 4] |
| 15 | 2.35; 2.16; 2.39; 2.39; 2.18; 2.09; 2.44; 2.56; 3.35; 3.22; 2.65 | [-3, 4] |
| 16 | 1.77; 0.99; 2.21; 1.50; 2.77; 3.46; 3.70; 4.02; 4.77; 4.82; 4.03 | [-1, 2] |

Задание 2. Аппроксимировать многочленами 2-й и 6-й степени по методу наименьших квадратов функцию, заданную таблицей значений x_i и y_i и сравнить качество приближений. Построить графики многочленов и отметить узловые точки (x_i, y_i) .

Задание 3. Для приведенных в таблице экспериментальных данных (x_i, y_i) определить параметры *линейной регрессии* с использованием встроенных функций Mathcad *slope* и *intercept*. Отобразить графически совокупность точек векторов x_i и y_i и результаты проведенной линейной регрессии.

Задание 4. Аппроксимировать данные из векторов x_i и y_i

- полиномом 4-й степени при помощи функций *regress* и *interp*;
- наборами полиномов второго порядка с помощью функций *loess* и *interp*, (при *span*, равном 0,5 и 2,5).

Отобразите графически результаты аппроксимации.

Задание 5. Аппроксимировать экспериментальные данные из таблицы значений x_i и y_i линейной комбинацией функций:

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x).$$

Коэффициенты вектора a найти с помощью функции *linfit*. Отобразить графически совокупность точек векторов x_i и y_i и результаты проведенной *линейной регрессии общего вида*.

Варианты задания 5

| Вариант | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$ |
|-----------|-------------------|--------------------------|-------------|
| 1 | e^x | $1/\sqrt{1+2\cos^2 x}$ | $\sin x$ |
| 2 | $1/(1+x^2)$ | e^x | $\sin(3x)$ |
| 3 | $1/(1+x^2)$ | $e^{\sin x}$ | x |
| 4 | $\text{arctg } x$ | $\ln(\ln x)$ | $\sin x$ |
| 5 | $e^{-x^2/2}$ | $1/x$ | e^{-x} |
| 6 | $(1+x)/(2+x)$ | $\cos(x/10)$ | $\cos x$ |
| 7 | $1/(1+e^{x^2})$ | $\sqrt{1+x^2}$ | $\cos x$ |
| 8 | $\cos(x/2)$ | $2-\cos x$ | $\sin(x/2)$ |
| 9 | $1/(1+e^x)$ | $\text{arctg } \sqrt{x}$ | $\sin(3x)$ |
| 10 | $\ln(x+5)$ | $\sqrt{1+x}$ | $\sin x$ |
| 11 | $1/x$ | $\sqrt{1+x}$ | $1/x^2$ |
| 12 | $\cos x$ | $1/(1+x+x^2)$ | $1/(1+x)$ |

| Вариант | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$ |
|-----------|-------------------|---------------|--------------|
| 13 | e^x | $\cos 4x$ | $-e^{x/2}$ |
| 14 | $\sqrt{1+e^{-x}}$ | $e^{x/3}$ | $\sin^2(3x)$ |
| 15 | $1/(1+x+x^2)$ | $\cos(x/10)$ | $\cos(x/10)$ |
| 16 | $\cos(x/2)$ | $2 - \cos 2x$ | $\sin(x/2)$ |

Задание 6. Аппроксимировать экспериментальные данные из таблиц значений x_i и y_i функцией вида

$$f(x) = e^{u_0 + u_1 x + u_2 x^2}.$$

Параметры вектора u найти с помощью функции *genfit*. Отобразить графически совокупность точек векторов x_i и y_i и результаты проведенной *нелинейной регрессии общего вида*.

Задание 7. Выполнить сглаживание экспериментальной функции заданной таблицей значений x_i и y_i с помощью встроенных функций Mathcad: *medsmooth*, *ksmooth* и *supsmooth*. Результаты сглаживания отобразить графически.

Лабораторная работа 5

Численное интегрирование и дифференцирование

Решение задачи, полученное в виде формулы (например в виде комбинации различных функций, производных, интегралов и т.п.) нужно уметь «довести до числа», которое чаще всего и служит окончательным ответом. Для этого в различных разделах математики выработаны разнообразные численные методы.

Интегрирование и дифференцирование обычно выполняются над аналитическими выражениями, однако, если функция задана в виде множества точек или интеграл функции не существует, или является очень сложным, используют численное решение.

Численное интегрирование

Формулы для приближенного вычисления определенных интегралов применяются очень часто. Дело в том, что для большого числа элементарных функций первообразные уже не выражаются через элементарные функции, в результате чего нельзя вычислить определенный интеграл с помощью формулы Ньютона–Лейбница. Встречаются также и случаи, когда приходится прибегать к формулам приближенного интегрирования даже для таких интегралов, которые могут быть найдены в конечном виде, но полученное выражение оказывается слишком сложным. Особенно важны формулы приближенного интегрирования при решении задач, содержащих функции, заданные таблично.

Квадратурные формулы

Наиболее распространенным подходом к численному вычислению интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx \tag{5.1}$$

является разбиение отрезка $[a, b]$ на n равных частей

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ с шагом $h = \frac{b-a}{n}$, интерполирование функции

$y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (получение интерполяционного многочлена $j(x)$) и замена в (5.1) интеграла интегральной суммой:

$$I = \int_a^b \varphi(x) dx \approx I_n = \sum_{i=0}^n A_i y_i. \tag{5.2}$$

Соотношения вида (5.2) называют *квадратурными формулами*.

Лабораторная работа 5. Численное интегрирование и дифференцирование

В простейших случаях в качестве интерполяционного многочлена $j(x)$ берут ступенчатую, кусочно-линейную или кусочно-параболическую функции, а также полином степени $k = n$ ($j(x) = x^k$) для которых квадратурные формулы принимают вид (см. пример 1 рисунке):

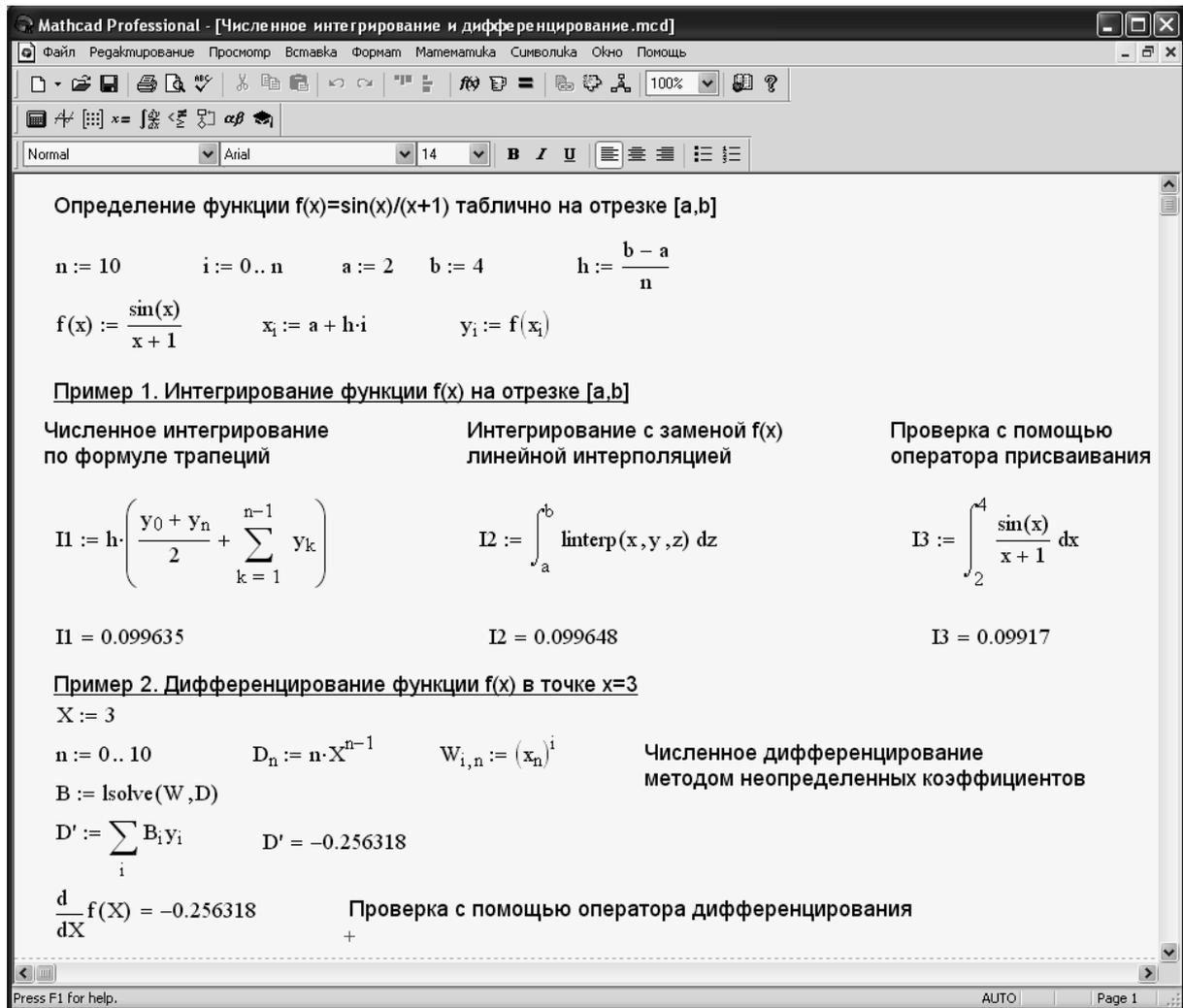


Рис. 5.1. Численное интегрирование и дифференцирование

- формула прямоугольников:

$$I_n = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2}), \quad x_{i-1/2} = x_{i-1} + \frac{1}{2}h, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

- формула трапеций:

$$I_n = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right); \quad (5.4)$$

- формула Симпсона (n – четное число):

$$I_n = \frac{h}{3} (y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n); \quad (5.5)$$

- метод неопределенных коэффициентов состоит в вычислении определенного интеграла (5.1) с помощью формулы (5.2), коэффициенты A_i которой находятся в результате решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} I_0 = A_0 + A_1 + \dots + A_n \\ I_1 = A_0 x_0 + A_1 x_1 + \dots + A_n x_n \\ \dots \\ I_n = A_0 x_0^n + A_1 x_1^n + \dots + A_n x_n^n, \end{cases} \quad (5.6)$$

где $I_k = \int_a^b x^k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, k=0, 1, \dots, n.$

Метод Монте-Карло

Во многих задачах исходные данные носят случайный характер, поэтому для их решения должен применяться статистико-вероятностный подход. На основе такого подхода и построен метод статистических испытаний, называемый также методом *Монте-Карло*.

Пусть h – равномерно распределенная на отрезке $[a, b]$ случайная величина:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^n f(\eta_i). \quad (5.7)$$

Для генерирования последовательности случайных чисел с равномерным законом распределения в Mathcad возможно использовать функцию *rnd*.

| | |
|---------------------|--|
| <code>rnd(x)</code> | Возвращает равномерно распределенное случайное число между 0 и x |
|---------------------|--|

Для реализации метода Монте-Карло удобно использовать функцию *mean*.

| | |
|----------------------|--|
| <code>mean(A)</code> | Возвращает среднее арифметическое значение элементов массива A |
|----------------------|--|

Численное дифференцирование

Численное дифференцирование аналитически или таблично заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в точке $x = X$ заключается в замене $f(x)$

интерполяционным полиномом $j(x)$, производную $\frac{d^m \varphi(x)}{dx^m} \approx \frac{d^m f(x)}{dx^m}$ которого можно найти аналитически с помощью соответствующих формул:

$$\frac{d^m f(x)}{dx^m} \approx \frac{d^m \varphi(x)}{dx^m} = \sum_{i=0}^n B_i y_i. \quad (5.8)$$

Метод неопределенных коэффициентов (см. пример 2 рисунке) предполагает использование в качестве интерполяционного многочлена $j(x)$ полином степени $k = n$ ($j(x) = (X - x_i)^k$), а коэффициенты B_i формулы (5.8) находятся в результате решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} D_0 = B_0 + B_1 + \dots + B_n \\ D_1 = B_0 x_0 + B_1 x_1 + \dots + B_n x_n \\ \dots \\ D_n = B_0 x_0^n + B_1 x_1^n + \dots + B_n x_n^n, \end{cases} \quad (5.9)$$

где $D_k = (X^k)' = kX^{k+1}$, $k=0, 1, \dots, n$.

Символьное интегрирование и дифференцирование

Для вычисления интегралов (или нахождения первообразных) аналитически заданной функции используется команда **Symbolic** → **Integrate on Variable** (**Интегрировать по переменной**). Она возвращает символьное значение неопределенного интеграла по указанной маркером ввода переменной. Выражение, в состав которого входит переменная, является подынтегральной функцией.

Команда **Symbolic** → **Differentiate on Variable** (**Дифференцировать по переменной**) возвращает символьное значение производной выражения по той переменной, которая указана курсором. Для вычисления производных высшего порядка нужно повторить вычисление необходимое число раз. Результат символьного преобразования иногда содержит *специальные функции*, которые не являются частью списка *встроенных функций* Mathcad.

Вот определения некоторых из них:

$$\begin{aligned} Ci(x) &= \gamma + \ln(x) + \int_0^x \frac{\cos(t) - 1}{t} dt, & Si(x) &= \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt, \\ Ci(x) &= \gamma + \ln(x) + \int_0^x \frac{\cosh(t) - 1}{t} dt, & Shi(x) &= \int_0^x \frac{\sinh(t)}{t} dt, \end{aligned}$$

где γ – константа Эйлера.

Порядок выполнения лабораторной работы 5

Задание 1. Определить функцию $f(x)$ таблично, вычислив значения

$y_i = f(x_i)$ в точках $x_i = a + hi, i = 0, 1, \dots, 8, h = \frac{(b-a)}{8}$ на отрезке $[a, b]$.

Варианты задания 1

| Вариант | f(x) | [a, b] | [c, d] |
|-----------|-------------------------------------|--------------|--------------|
| 1 | $1/(\operatorname{tg} 2x+1)$ | [0,4; 0,8] | [2,0; 2,1] |
| 2 | $\cos 3x/(1-\cos 3x)^2$ | [0,8; 1,6] | [-1,0; -0,9] |
| 3 | $1/(x\sqrt{x^3+4})$ | [0,18; 0,96] | [0,5; 0,6] |
| 4 | $\sin x/(1+\sin x)$ | [0,8; 1,6] | [2,0; 2,1] |
| 5 | $x^2 \lg(x+2)$ | [0; 0,4] | [1,5; 1,6] |
| 6 | $x^2 \operatorname{arctg}(x/3)$ | [0,8; 1,6] | [1,0; 1,1] |
| 7 | $e^{2x} \sin 3x$ | [0,4; 1,2] | [2,0; 2,1] |
| 8 | $\operatorname{ctg} 2x/(\sin 2x)^2$ | [0,8; 1,2] | [1,0; 1,1] |
| 9 | $(x+1)\sin x$ | [1,0; 5,0] | [1,0; 1,1] |
| 10 | $5x+x \lg x$ | [0,2; 1,0] | [1,3; 1,4] |
| 11 | $(2x+3)\sin x$ | [0,4; 1,2] | [0,5; 0,6] |
| 12 | $\cos x/(2x+5)$ | [0,4; 1,2] | [1,0; 1,1] |
| 13 | $1/(1+x+x^2)$ | [0; 4,0] | [2,0; 2,1] |
| 14 | $(1+x)/(2+x)$ | [0,4; 0,8] | [1,5; 1,6] |
| 15 | $\sqrt{1+e^{-x}}$ | [0,4; 1,2] | [0,5; 0,6] |
| 16 | $(\lg x+1)\sin 2x$ | [1,0; 5,0] | [1,0; 1,1] |

Задание 2. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$:

- с помощью встроенного *оператора интегрирования*;
- по формуле *прямоугольников*;
- по формуле *Симпсона*;
- с помощью встроенного *оператора интегрирования* и интерполяцией табличной функции *кубическим сплайном* (функции *cspline* и *interp*);
- методом *неопределенных коэффициентов* для численного интегрирования.

Задание 3. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ методом Монте-Карло.

Для этого необходимо:

- определить диапазон случайных чисел, например $j := 0 \dots 1000$;
- определить с помощью функции *rnd* равномерно распределенную случайную величину h_j на отрезке интегрирования $[a;b]$;
- создать вектор $F_j = f(h_j)$;
- с помощью функции *mean* вычислить интеграл.

Задание 4. Найти первообразную аналитически заданной функции $f(x)$, используя команду **Symbolic** → **Integrate on Variable**.

Задание 5. Вычислить значения первой и второй производных функции $f(x)$ в точке $X=c$:

- с помощью операторов дифференцирования Mathcad;
- *методом неопределенных коэффициентов* для численного дифференцирования. Определить функцию $f(x)$ таблично, вычислив значения $y_i = f(x_i)$ в точках $x_i = c + hi$, $i=0, 1, \dots, 10$, $h=0,01$ на отрезке $[c;d]$.

Задание 6. Определить символьное значение первой и второй производных $f(x)$, используя команду **Symbolic** → **Differentiate on Variable**.

Лабораторная работа 6

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

При моделировании нередко оказывается, что исследователь не имеет возможности описать функцию, характеризующую изучаемый процесс. Но в ряде случаев возможно описание связи, существующей между этой функцией и ее производными, с помощью дифференциальных уравнений, решение которых и позволяет исследователю найти интересующую его функцию.

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) широко применяется в практике научно-технических расчетов. Хотя линейные ОДУ могут иметь решения в виде специальных функций, многие физические системы нелинейны и описываются нелинейными ОДУ, не имеющими аналитического решения. В этом случае приходится использовать численные методы решения ОДУ. Чтобы решить ОДУ, необходимо знать значения зависимой переменной и (или) производных при некоторых значениях независимой переменной. Если эти дополнительные условия задаются при одном значении независимой переменной, то такая задача называется *задачей Коши*. Если же условия задаются при двух или более значениях независимой переменной, то задача называется *краевой*.

Задача Коши

Задачу Коши можно сформулировать следующим образом: пусть дано ОДУ:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (6.1)$$

и начальное условие $y(x_0) = y_0$. Требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую как указанному уравнению, так и начальному условию.

Численное решение задачи Коши состоит в построении таблицы приближенных значений y_1, y_2, \dots, y_n решения уравнения в точках x_1, x_2, \dots, x_n . Чаще всего $x_i = x_0 + ih$, $i=0, 1, \dots, n$, где h - шаг приращения переменной x , n - число интервалов решения с шагом h .

Рассмотрим две группы численных методов решения задачи Коши: *одношаговые* и *многошаговые*.

Одношаговые методы

Одношаговые методы – это методы, в которых для нахождения следующей точки на кривой $y = f(x)$ требуется информация лишь об одном предыдущем шаге. Простейшим из одношаговых методов является метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h, \quad i=0, 1, \dots, n-1. \quad (6.2)$$

Метод Эйлера имеет невысокую точность (порядка h).

Для достижения более высокой точности (порядка h^4) используют метод Рунге-Кутты четвертого порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6}, \quad (6.3)$$

где

$$k_0 = h f(x_i, y_i); \quad k_1 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right);$$

$$k_2 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right); \quad k_3 = h f(x_i + h, y_i + k_2).$$

Многошаговые методы

В *многошаговых методах* для отыскивания следующей точки кривой $y = f(x)$ требуется информация *более чем об одной* из предыдущих точек. Пусть найдены значения $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$ в четырех последовательных точках. При этом имеются также вычисленные ранее значения правой части уравнения (6.1) $f_{i-3}, f_{i-2}, f_{i-1}, f_i$. Тогда схему *метода Адамса* можно представить в виде:

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{h}{2} \Delta f_i + \frac{5h}{12} \Delta^2 f_i + \frac{3h}{8} \Delta^3 f_i, \quad i=3, 4, \dots, n-1, \quad (6.4)$$

где конечные разности в точке x_i имеют вид:

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1}; \quad \Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}; \quad \Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}. \quad (6.5)$$

Решение задачи Коши средствами Mathcad

Инструментарий для решения ОДУ (систем ОДУ) различного порядка в Mathcad представлен широким спектром встроенных функций, работа одной из которых (*rkfixed* – метод Рунге–Кутта (*rk*) четвертого порядка с фиксированным (*fixed*) шагом интегрирования) показана на рис. 6.1.

| | |
|---------------------------------|--|
| $\text{rkfixed}(y, a, b, n, D)$ | Возвращает матрицу с $p + 1$ столбцами и $n + 1$ строками (p – количество уравнений или порядок уравнения, n – число шагов на интервале $[a, b)$) – таблицу решений системы: первый столбец – это значения аргумента x , а последующие столбцы – значения ординат решения. y – вектор начальных условий размерности n . $D(x, y)$ – функция-вектор из n элементов, содержащая первые производные неизвестных функций |
|---------------------------------|--|

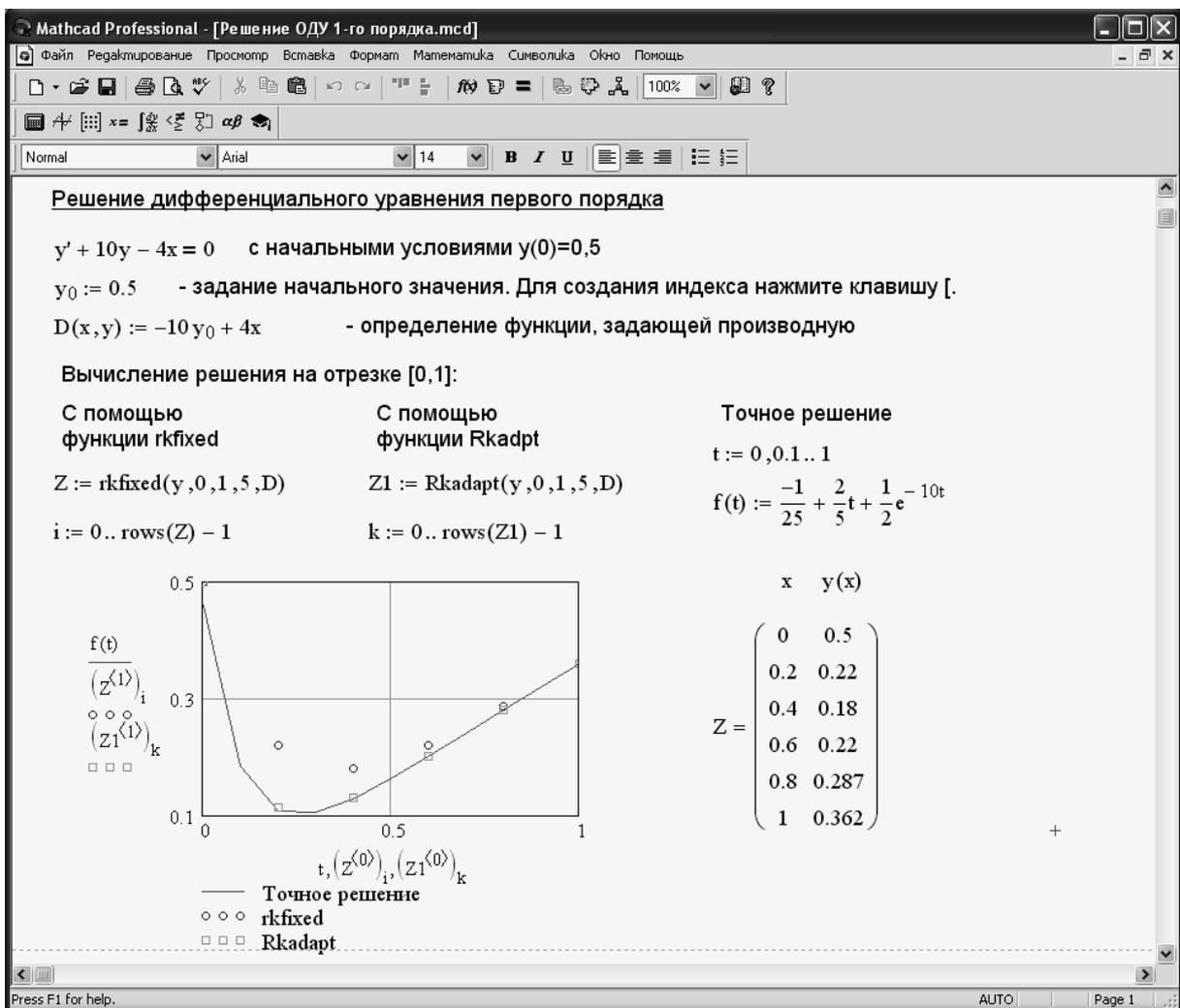


Рис. 6.1. Решение ОДУ 1-го порядка

Можно решить задачу более точно (более быстро), если уменьшить шаг h там, где производная меняется быстро, и увеличить шаг там, где она

ведет себя более спокойно. Для этого предусмотрена функция *Rkadapt* (*adaptative* – адаптивный). Аргументы и матрица, возвращаемая функцией *Rkadapt*, такие же, как при *rkfixed* (см. рис. 6.1).

Краевые задачи

Краевая задача формулируется следующим образом: пусть на отрезке $[a, b]$ требуется найти решение дифференциального уравнения (для простоты объяснения будем вести на примере ОДУ второго порядка):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y'), \text{ при граничных условиях } y(a) = A, y(b) = B. \quad (6.6)$$

В этом случае Mathcad предлагает использовать функцию *sbval*, чтобы найти недостающие начальные условия в точке a .

| | |
|---|---|
| <p><i>Sbval</i>($v, a, b, D, load, score$)</p> | <p>Возвращает вектор, содержащий недостающие начальные условия в точке a. Вектор v задает начальные приближения; a, b – граничные точки интервала решений; $D(x, y)$ – функция-вектор с первыми производными неизвестных функций; $load(a, v)$ – функция-вектор, возвращающая значение начальных условий в точке a; $score(b, y)$ – функция-вектор, каждый элемент которого содержит разность между начальным условием, заданным в точке b, и значением искомого решения в этой точке</p> |
|---|---|

После того, как эти недостающие начальные условия будут получены, можно решать обычную задачу с начальными условиями – *задачу Коши*, используя любую из функций, описанных выше. Пример решения краевой задачи показан на рис. 6.2.

Символьное решение линейных дифференциальных уравнений

Для получения аналитического решения линейных ОДУ в Mathcad необходимо выполнить следующие действия (пример 1, рис. 6.3):

- Напечатать исходное уравнение, используя операторы дифференцирования и комбинацию клавиш **[Ctrl]=** для печати символа = (логическое равенство).

- Отметив независимую переменную, выполнить прямое преобразование Лапласа **Symbolic** → **Transforms** → **Laplace Transform (Преобразование Лапласа)**. Результат для ОДУ выше 1-го порядка будет помещен в буфер обмена. Вызовите его, нажав клавишу **F4**.

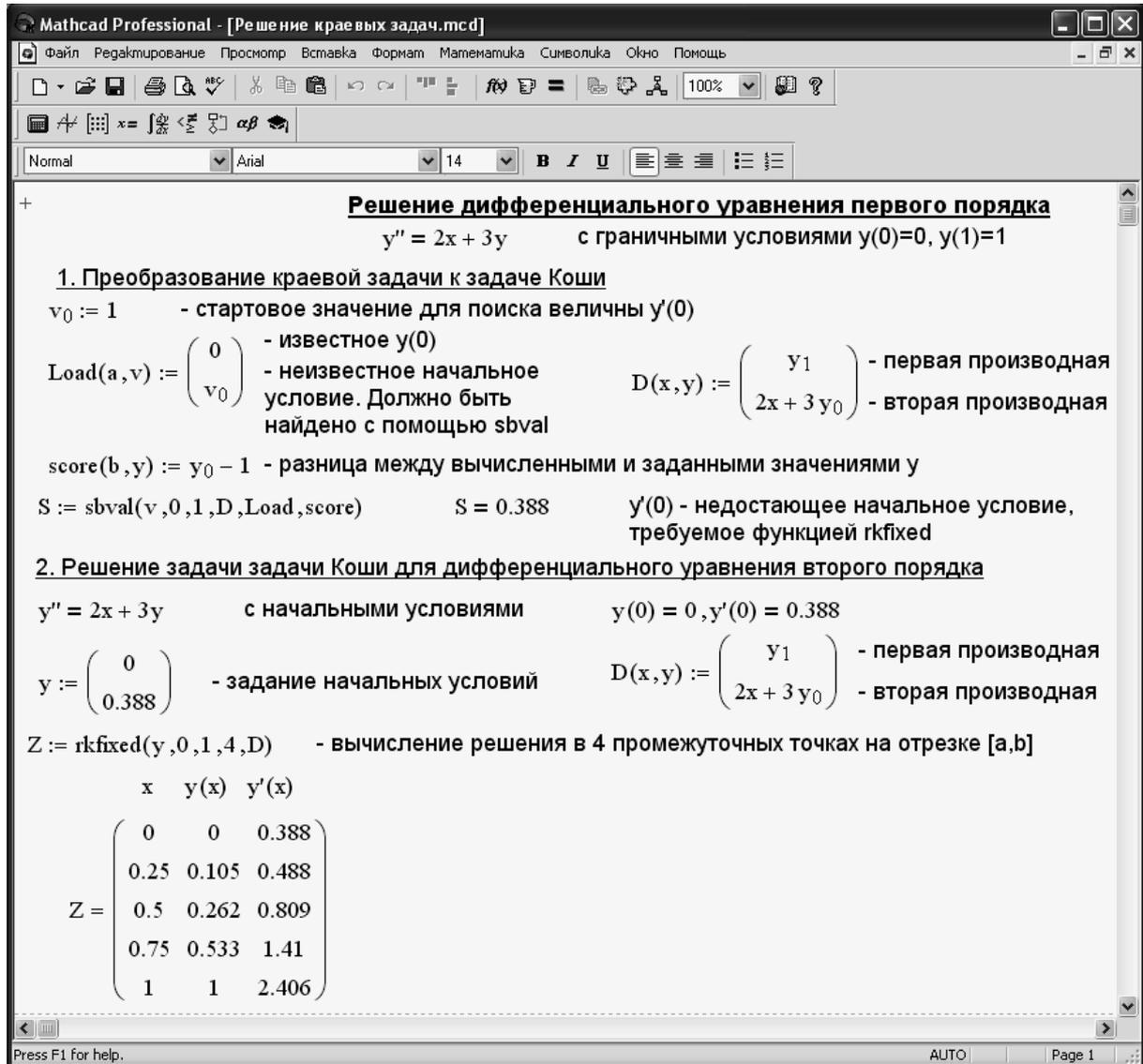


Рис. 6.2. Решение краевой задачи

- По результатам преобразования Лапласа “вручную” составить алгебраическое уравнение, приняв обозначения $L = \text{laplace}(y(t), t, s)$, $C1 = y(0)$, $C2 = \text{diff}(y(0), 0)$.
- Решить составленное алгебраическое уравнение относительно переменной L , используя команду **Symbolic** → **Solve for Variable (Решить относительно переменной)**.

- Отметить переменную s и, произведя обратное преобразование Лапласа **Symbolic** → **Transforms** → **Inverse Laplace Transform** (Обратное преобразование Лапласа), получить решение заданного ОДУ в виде временной зависимости.

Пример символьного решения ОДУ приведен на рис. 6.3.

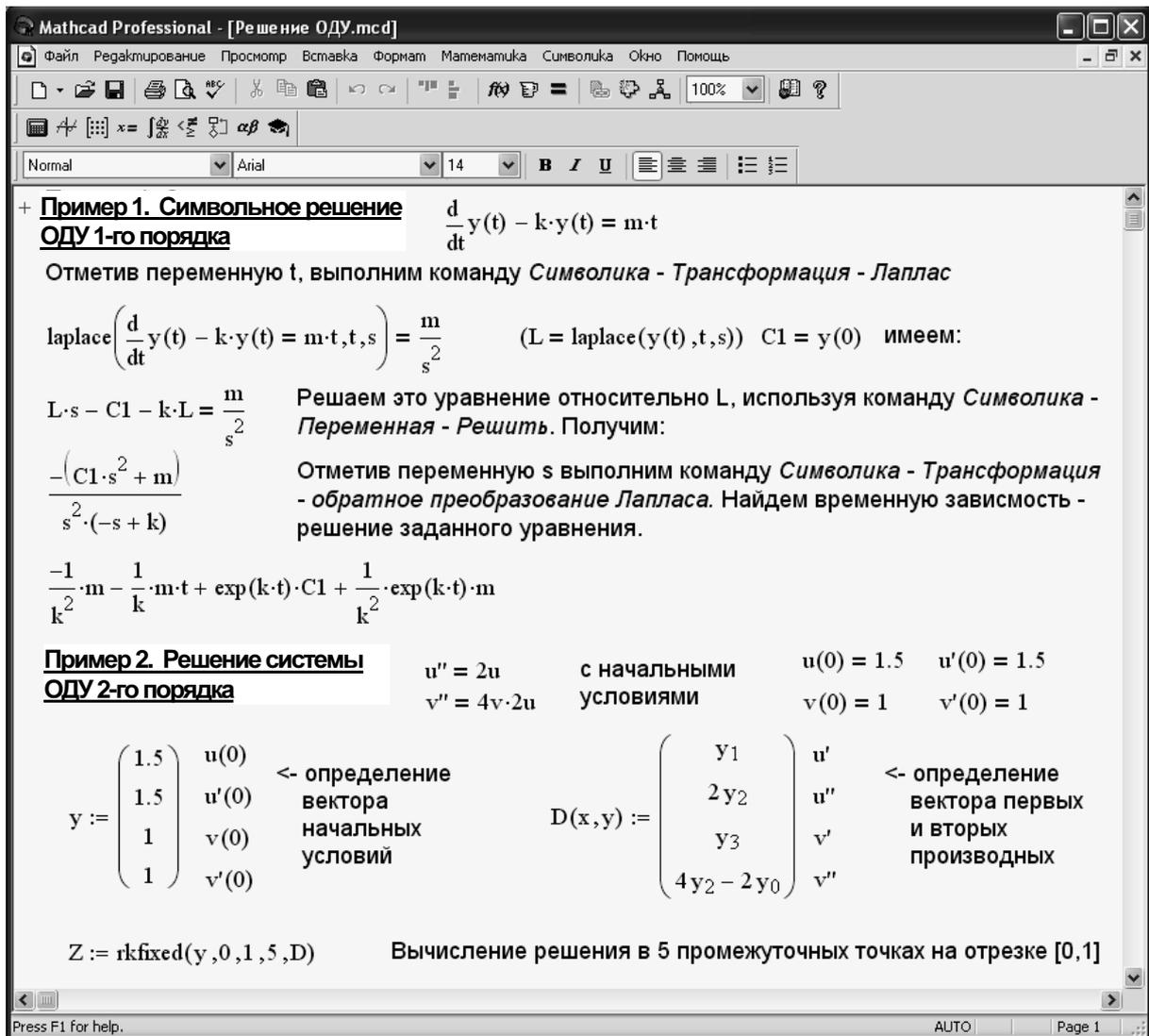


Рис.6.3. Некоторые возможности решения ОДУ в Mathcad

Порядок выполнения лабораторной работы 6

Задание 1. Решить задачу Коши: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(0) = 1$ с шагом $h = 0,1$

на отрезке $[0, 1]$:

- методом Эйлера;

- методом *Рунге–Кутты* (коэффициенты k_i задать как функции от x и y);
- методом *Адамса*;
- используя функцию *rkfixed*.

Варианты задания 1

| Вариант | $f(x, y)$ | Вариант | $f(x, y)$ | Вариант | $f(x, y)$ |
|----------|--------------|-----------|-------------------|-----------|------------------|
| 1 | $x + y$ | 6 | $2y - \cos 2x$ | 11 | $2y + 3e^{-x}$ |
| 2 | $2x^2 + 2y$ | 7 | $y - e^{x/2} + 2$ | 12 | $y/2 - e^{-x}$ |
| 3 | $e^x - 3y$ | 8 | $3y - 2\sin x$ | 13 | $y + (\cos x)/3$ |
| 4 | $y - \sin x$ | 9 | $e^{2x} - y$ | 14 | $y - 4x + 5$ |
| 5 | $y/3 - x^2$ | 10 | $2\sin x + y$ | 15 | $2x - y/3 - e^x$ |

Задание 2. Построить графики решений, полученных методами Эйлера, Рунге–Кутты, Адамса и с помощью функции *rkfixed*. Вычислить в точке $x = 1$ относительную погрешность для каждого метода.

Задание 3. Найти аналитическое (точное) решение ОДУ из задания 1 с помощью преобразований Лапласа (команды **Symbolic** \Rightarrow **Transforms** \Rightarrow **Laplace Transform** и **Inverse Laplace Transform**).

Задание 4. Решить задачу Коши для системы ОДУ при заданных начальных условиях на отрезке $[0, 2]$ с шагом $h = 0,2$. Решать с помощью функции *rkfixed*. Построить графики функций $u(t)$ и $v(t)$.

Варианты задания 4

| Вариант | Система ОДУ | Начальные условия | | | |
|----------|---|-------------------|---------|--------|---------|
| | | $u(0)$ | $u'(0)$ | $v(0)$ | $v'(0)$ |
| 1 | $\begin{cases} u'' = 2v + u \\ v'' = 4v - 2u \end{cases}$ | 1,5 | 1,5 | 1 | 1 |
| 2 | $\begin{cases} u'' = -v + 3u \\ v'' = v - 2u \end{cases}$ | -1 | 1 | -1,5 | 3 |
| 3 | $\begin{cases} u'' = 2v - u \\ v'' = 4v + u \end{cases}$ | 1,5 | 1,5 | 1 | 1 |

Лабораторная работа 6. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

| Вариант | Система ОДУ | Начальные условия | | | |
|---------|---|-------------------|---------|--------|---------|
| | | $u(0)$ | $u'(0)$ | $v(0)$ | $v'(0)$ |
| 4 | $\begin{cases} u'' = 5v \\ v'' = v + 2u + t \end{cases}$ | 1 | 1,5 | 0 | 2 |
| 5 | $\begin{cases} u'' = v + u + t \\ v'' = v + 2u - t \end{cases}$ | 0,5 | 1,5 | -1 | 2 |
| 6 | $\begin{cases} u'' = 2v + u + t \\ v'' = 4v \end{cases}$ | 0,5 | 2 | 1 | 2 |
| 7 | $\begin{cases} u'' = -v + t \\ v'' = 5v - 7u \end{cases}$ | 5 | 5 | -1 | 1 |
| 8 | $\begin{cases} u'' = v - 5u \\ v'' = 2v + u + t \end{cases}$ | 1,5 | 1 | 3 | 1 |
| 9 | $\begin{cases} u'' = 1/2 + v \\ v'' = 4 - u + t \end{cases}$ | 2 | 0 | -1 | 1 |
| 10 | $\begin{cases} u'' = -v + t \\ v'' = v + 3u \end{cases}$ | -1 | 2 | -1,5 | 0 |
| 11 | $\begin{cases} u'' = v - u - t \\ v'' = 2v + u \end{cases}$ | 1,5 | 1,5 | -1 | -1 |
| 12 | $\begin{cases} u'' = 5v + t \\ v'' = 3v + u \end{cases}$ | -1 | 1,5 | 0 | -2 |
| 13 | $\begin{cases} u'' = v + u \\ v'' = v + u - t \end{cases}$ | -0,5 | 1 | -1 | 2 |
| 14 | $\begin{cases} u'' = 2v - u \\ v'' = 4v + u \end{cases}$ | 0 | -2 | 0 | 2 |
| 15 | $\begin{cases} u'' = v - 2t \\ v'' = v + 3u \end{cases}$ | 3 | 3 | -1 | 1 |
| 16 | $\begin{cases} u'' = 7v + u - t \\ v'' = 4v - u \end{cases}$ | 0,5 | 2 | 1 | 2 |

Задание 5. На отрезке $[a, b]$ с использованием функций *load*, *score* и *sbval* преобразовать краевую задачу: $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')$ при граничных

условиях $y(a) = A$, $y(b) = B$ к задаче Коши. Найти решение заданного ОДУ в 10 промежуточных точках с помощью функции *rkfixed*.

Варианты задания 5

| Вариант | $f(x, y, y')$ | Граничные условия | | | |
|-----------|-------------------------------------|-------------------|-----|--------|--------|
| | | a | b | $y(a)$ | $y(b)$ |
| 1 | $e^x y + \cos x$ | 1 | 2 | 0 | 0 |
| 2 | $y \sin x + e^{-x}$ | 2 | 3 | 1 | 0 |
| 3 | $y \cos x + \operatorname{tg} x$ | 0 | 1 | 0 | 0,45 |
| 4 | $x^3 y + \cos x$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | $x + e^x y / (1 - x)$ | 2 | 4 | 1 | 0,14 |
| 6 | $x^2 y + 1 / (1 - x)$ | 1 | 3 | 0 | 0,17 |
| 7 | $y \cos x + \cos^2 x$ | 1 | 2 | 0 | 0 |
| 8 | $(2 + x)y + \operatorname{arctg} x$ | 0 | 3 | 0 | 0,22 |
| 9 | $(5 - x)y + x$ | 2 | 4 | 0 | -1,2 |
| 10 | $e^{-x} y + 2e^{-x}$ | 0 | 1,5 | 2,4 | 0 |
| 11 | $e^{-x} y / x + x$ | -3 | -2 | 3 | 0 |
| 12 | $(x^2 + 1/x)y + 1/x^2$ | 2 | 3 | 0 | 0 |
| 13 | $(10 - x)y + x$ | -1 | 0 | 2 | 0 |
| 14 | $y/x^2 + x$ | 1 | 3 | 1,5 | 0 |
| 15 | $y/x^2 + x$ | 7 | 8 | 0 | 0 |
| 16 | $x^2 + 1/(1 - y)$ | 1 | 3 | 0 | 0,17 |

Лабораторная работа 7 Решение дифференциальных уравнений в частных производных

Различные физические процессы происходят в пространстве и во времени, поэтому математические модели, описывающие их, содержат несколько переменных и учитывают пространственные и временные изменения. Основным математическим аппаратом, который используют при описании физических процессов, являются дифференциальные уравнения в частных производных. Физическое «происхождение» этих уравнений нередко подчеркивается их особым названием – уравнения математической физики.

Предположим, что мы решаем задачу, в которой искомые величины зависят от нескольких переменных. В этом случае решаемые уравнения содержат частные производные и называются *дифференциальными уравнениями в частных производных*.

Выделяют три важнейших класса данных уравнений, описывающих определенные физические процессы. *Гиперболические уравнения*: к уравнениям этого типа приводят задачи о распространении волн в воде, воздухе и других средах, задачи о колебаниях стержней, струн мембран, электрических колебаниях в проводах. *Параболические уравнения*: описывают распространение тепла, диффузию газа, фазовый переход тел. *Эллиптические уравнения*: помогают исследовать стационарные процессы различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузию и др.).

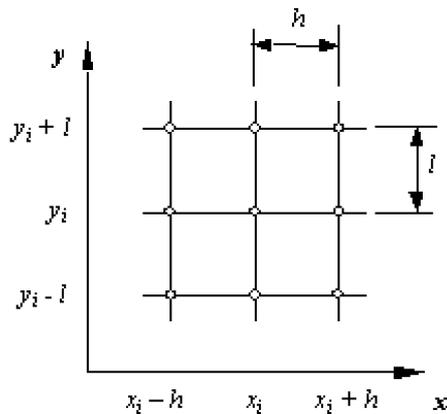


Рис. 7.1. Двумерная сетка

К сожалению, очень многие из таких уравнений не имеют аналитического решения, и чтобы решить их приходится прибегать к численным методам. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных численно используется *метод конечных разностей*.

Для решения дифференциальных уравнений в частных производных численно используется *метод конечных разностей*. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных численно используется *метод конечных разностей*.

Метод конечных разностей

Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных *методом конечных разностей* состоит в следующем:

1. Построение в области решения равномерной сетки, содержащей n узловых точек (рис. 7.1).

2. Представление производных в конечно-разностной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h}; & \frac{\partial f}{\partial y} &\approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2l}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2}; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &\approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{l^2} \text{ и т.д.,} \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $f_{i,j}, f_{i+1,j}, f_{i-1,j}, f_{i,j+1}, f_{i,j-1}$ – значения функции $f(x, y)$ в точках $(x_i, y_j), (x_i+h, y_j), (x_i-h, y_j), (x_i, y_j+l), (x_i, y_j-l)$ соответственно.

Такие разностные уравнения записывают для всех узлов сетки и получают в результате систему из n уравнений с n неизвестными.

3. Решение полученной системы с целью получения приближённого решения в узлах сетки.

Гиперболические уравнения в частных производных

Простейшим видом уравнения гиперболического типа является *волновое уравнение*. К исследованию волнового уравнения приводит рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводе, крутильных колебаний вала и т.п.

Рассмотрим одномерное уравнение колебаний струны. В области $\{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ требуется найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.2)$$

Искомая функция $u(x, t)$ должна удовлетворять *начальным условиям*, описывающим начальную ($t = 0$) форму струны $j(x)$ и скорость её точек $y(x)$:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7.3)$$

а также *граничным условиям*, указывающим, что происходит на концах струны ($x = 0; x = l$):

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7.4)$$

Совокупность начальных и граничных условий называется *краевыми условиями*.

Для построения разностной схемы решения задачи (7.2)...(7.4) построим в области $\{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ сетку

$$x_i = ih, i=0, 1, \dots, n; \quad l = hn; \quad t_j = jt, j=0, 1, \dots, m; \quad T = tm$$

и аппроксимируем уравнение (7.2) в каждом внутреннем узле сетки на шаблоне “крест” (рис. 7.2).

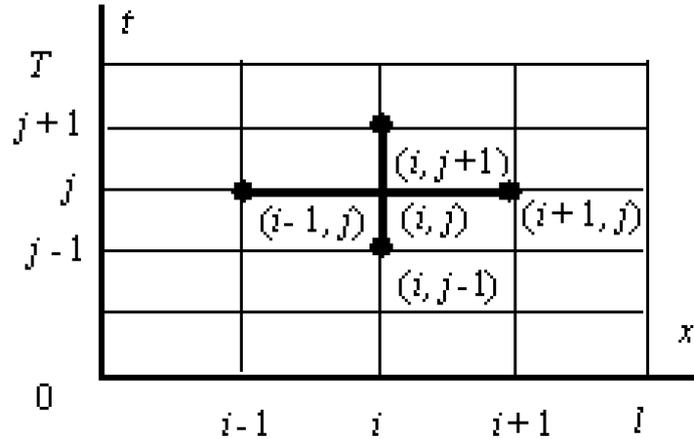


Рис. 7.2. Шаблон для волнового уравнения

Используя для аппроксимации частных производных выражения (7.1), получаем следующую разностную аппроксимацию уравнения (7.2):

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (7.5)$$

Решая уравнение (7.5) относительно единственного неизвестного значения $u_{i,j+1}$, получаем следующую схему:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= 2(1-\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \\ \lambda &= a^2\tau^2/h^2, \quad i=1, \dots, n-1; \quad j=1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Схема (7.6) называется *трехслойной* потому, что связывает между собой значения $u_{i,j}$ функции $u(x,t)$ на трех временных слоях с номерами: $j-1, j+1$. Схема (7.6) является *явной*, т.е. позволяет в явном виде выразить $u_{i,j}$ через значения u с предыдущих двух слоев.

Для начала счета по схеме (7.6) необходимы значения $u_{i,j}$ функции $u(x,t)$ на нулевом ($j=0$) и первом ($j=1$) временных слоях. Они определяются начальными условиями (7.3) и записываются в виде:

$$u_{i,0} = \varphi(x_i), \quad \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{\tau} \approx \psi(x_i), \quad i=0, 1, \dots, n. \quad (7.7)$$

Граничные условия (7.4) также записываются в сеточном виде:

$$u_{0,j} = \mu_1(t_j), \quad u_{n,j} = \mu_2(t_j), \quad j=0, 1, \dots, m. \quad (7.8)$$

Таким образом, решение исходной дифференциальной задачи (7.2)...(7.4) сводится к решению разностной задачи (7.6)...(7.8). Схема устойчива, если выполнено условие Куранта $a\tau/h < 1$.

Параболические уравнения в частных производных

Простейшим видом уравнения параболического типа является *уравнение теплопроводности*, или *уравнение Фурье*. К исследованию уравнения теплопроводности, или уравнения Фурье, приводит рассмотрение процессов распространения тепла, фильтрации жидкости и газа в пористой среде, а также некоторых вопросов теории вероятностей.

Рассмотрим задачу о распространении тепла в однородном стержне длины l , на концах которого поддерживается заданный температурный режим. Задача состоит в отыскании функции $u(x,t)$, удовлетворяющей в области $\{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0, \quad (7.9)$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (7.10)$$

и граничным условиям

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t) \quad (7.11)$$

Построим в области $\{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ равномерную прямоугольную сетку с шагом h в направлении x и шагом h в направлении t (рис. 7.3). Тогда $x_i = i h, i=0,1,\dots,n; h=l/n; t_j = j \tau, j=0,1,\dots,m; t=T/m$.

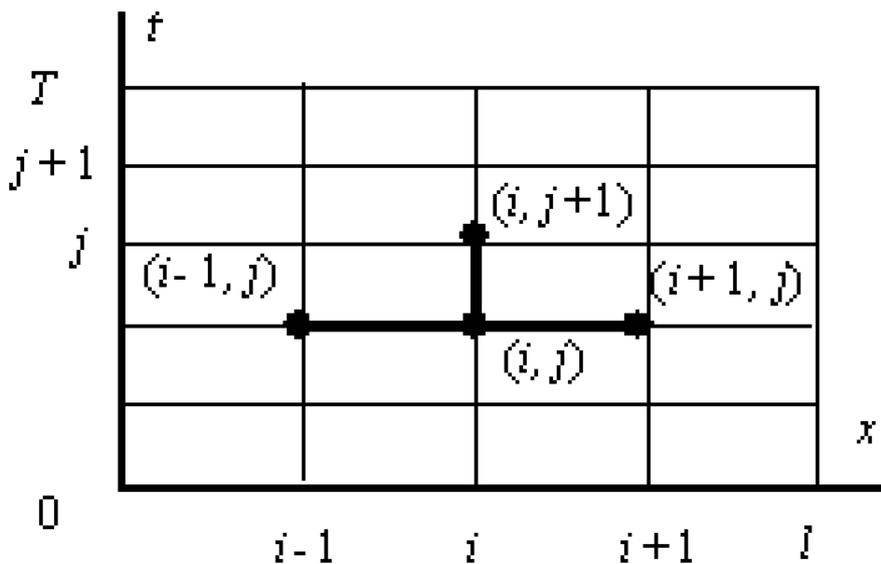


Рис 7.3. Шаблон для уравнения теплопроводности

Аппроксимируем дифференциальную задачу (7.9)...(7.11) на четырехточечном шаблоне, в результате получаем явную двухслойную разностную схему:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= \lambda u_{i+1,j} + (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i-1,j}, \\ i &= 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 1, 2, \dots, m-1; \\ u_{i,0} &= \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n; \\ u_{0,j} &= \mu_1(t_j), \quad u_{n,j} = \mu_2(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, m; \\ \lambda &= \frac{a\tau}{h^2}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Схема устойчива при $l \leq 1/2$.

Эллиптические уравнения в частных производных

К исследованию такого уравнения приводит рассмотрение задач об электрических и магнитных полях, о стационарном тепловом состоянии, задач гидродинамики, диффузии и т.д. Рассмотрим решения уравнения Пуассона и его однородной формы – уравнения Лапласа.

Решение уравнения Пуассона будем искать в некоторой ограниченной области $W = \{0 \leq x \leq q_1, 0 \leq y \leq q_2\}$ изменения независимых переменных x, y :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \tag{7.13}$$

граничные условия:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= m_1(y), \quad u(a, y) = m_2(y), \quad y \in [0, b], \\ u(x, 0) &= m_3(x), \quad u(x, b) = m_4(x), \quad x \in [0, a], \end{aligned} \tag{7.14}$$

где f, m_1, m_2, m_3, m_4 – заданные функции (задача, состоящая в решении эллиптического уравнения при заданных значениях искомой функции на границе расчётной области, называется задачей Дирихле.).

Построим в области W равномерную прямоугольную сетку с шагами h и l по x и y соответственно: $x_i = i h, i = 0, 1, \dots, n, h = q_1/n, y_j = j l, j = 0, 1, \dots, m, l = q_2/m$.

Аппроксимируем дифференциальную задачу (7.13)...(7.14) на шаблоне “крест” (см. рис. 7.3), в результате получаем неявную трехслойную разностную схему:

$$\begin{aligned}
 & a_{i,j}u_{i+1,j} + b_{i,j}u_{i-1,j} + c_{i,j}u_{i,j+1} + d_{i,j}u_{i,j-1} + e_{i,j}u_{i,j} = f_{i,j}, \\
 & \text{где } a_{i,j} = b_{i,j} = 1/h^2, \quad c_{i,j} = d_{i,j} = 1/l^2, \quad e_{i,j} = -2(1/h^2 + 1/l^2), \\
 & i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \\
 & u_{0,j} = \mu_1(y_j), \quad u_{n,j} = \mu_2(y_j), \quad j = 0, 1, \dots, m, \\
 & u_{i,0} = \mu_3(x_i), \quad u_{i,m} = \mu_2(y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.
 \end{aligned}
 \tag{7.15}$$

Для решения уравнения Пуассона в Mathcad используется функция *relax*.

| | |
|---|---|
| <i>relax(a, b, c, d, e, f, u, rjac)</i> | Возвращает квадратную матрицу решения уравнения Пуассона. Здесь <i>a, b, c, d, e</i> – квадратные матрицы одинакового размера, содержащие коэффициенты уравнения (7.15); <i>f</i> – квадратная матрица, содержащая значения правой части уравнения (7.15) в каждой точке по области <i>W</i> , в которой ищется решение; <i>u</i> – квадратная матрица, содержащая граничные значения решения на границе области и начальное приближение для решения внутри области; <i>rjac</i> – число между 0 и 1, которое управляет сходимостью алгоритма |
|---|---|

При $a = 0$ получаем уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.
 \tag{7.16}$$

Если для уравнения Лапласа в области *W* ввести сетку с равным шагом по осям *x* и *y*, то разностная схема (7.16) существенно упрощается:

$$\begin{aligned}
 & u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0, \\
 & i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \\
 & u_{0,j} = \mu_1(y_j), \quad u_{n,j} = \mu_2(y_j), \quad j = 0, 1, \dots, m, \\
 & u_{i,0} = \mu_3(x_i), \quad u_{i,m} = \mu_2(y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.
 \end{aligned}
 \tag{7.17}$$

Решение уравнения Лапласа с помощью функции *relax* показано на рис. 7.4.

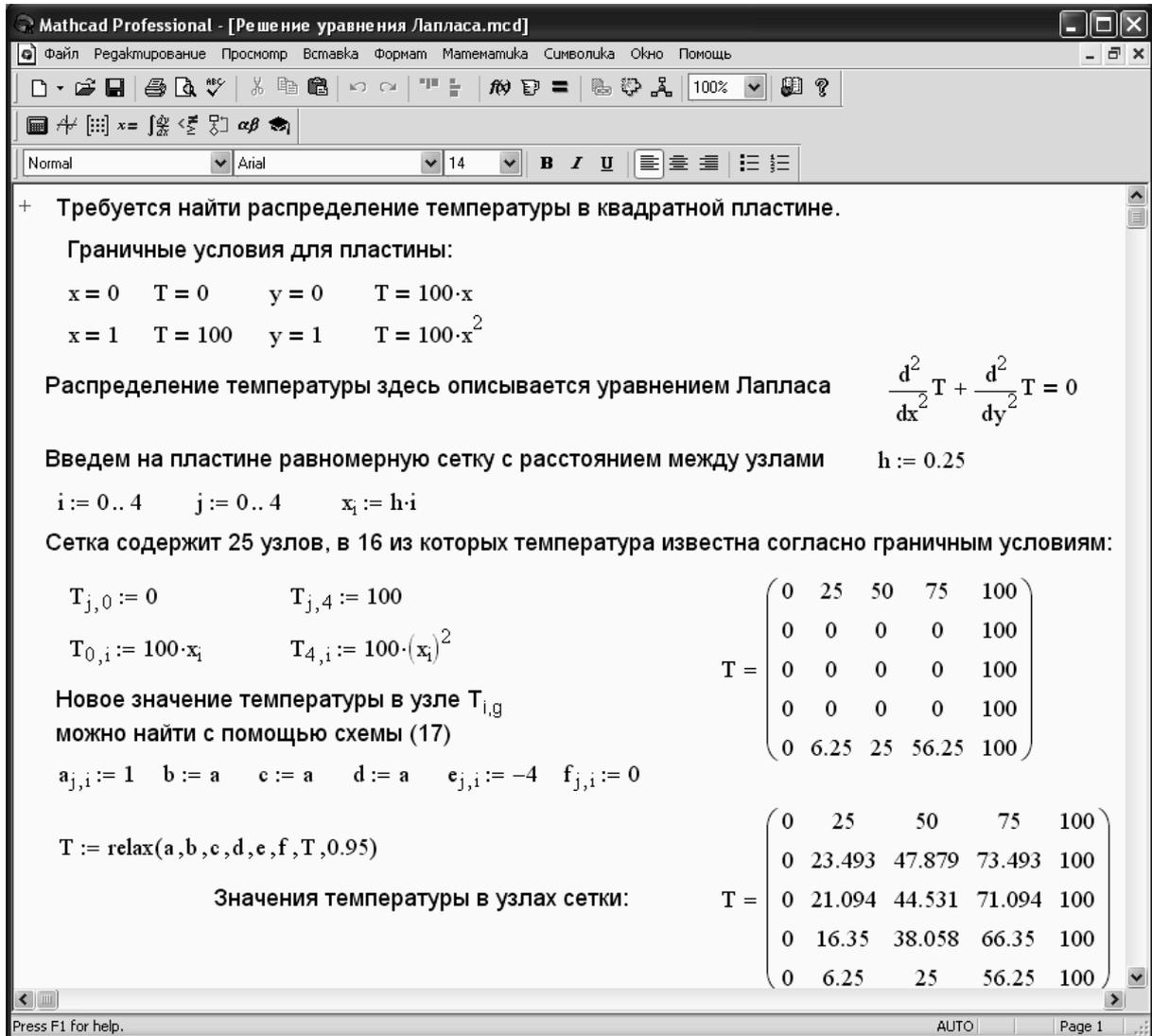


Рис. 7.4. Решение уравнения Лапласа

Порядок выполнения лабораторной работы 7

Задание 1. Решить задачу о колебании струны единичной длины с закрепленными концами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a=1$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

и нулевыми граничными условиями

$$u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

Варианты задания 1

| Вариант | $f(x)$ | a | b | Вариант | $f(x)$ | a | b | c | |
|---------|--------------------|-----|-----|---------|--------|-------------|-----|-----|---|
| 1 | | 1 | 0.1 | 9 | | - | - | - | |
| 2 | | 2 | 0.1 | 10 | | $4x^3(x-1)$ | - | - | - |
| 3 | | 4 | 0.2 | 11 | | 1 | 0.1 | 0.2 | |
| 4 | | 6 | 0.3 | 12 | | 3 | 0.2 | 0.4 | |
| 5 | | 8 | 0.4 | 13 | | 5 | 0.4 | 0.6 | |
| 6 | $x(x^2-1)$ | - | - | 14 | | 7 | 0.6 | 0.8 | |
| 7 | $\sin(px^2)$ | - | - | 15 | | 9 | 0.8 | 0.9 | |
| 8 | $\sin(px^2)\cos x$ | - | - | | | | | | |

Для решения задачи построить сетку из 11 узлов по x ($i = 0, 1, \dots, 10$) и провести вычисления для 16 слоев по y ($j = 0, 1, \dots, 16$). Вычисления выполнить с шагом 0,1 по x и шагом 0,05 по t . Отобразить графически решение задачи на 0, 5, 10-м и 16-м временных слоях.

Задание 2. Найти решение $u(x,t)$ для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a=1$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = a, \quad u(1,t) = b.$$

Для решения задачи построить сетку из 11 узлов по x ($i = 0, 1, \dots, 10$) и провести вычисления для 12 слоев по t ($j = 0, 1, \dots, 12$). Вычисления выполнить с шагом h по x , равным 0,1 и шагом t по t , равным 0,005. Отобразить графически решение задачи на 0, 4, 8-м и 12-м слоях и построить интегральную поверхность распределения температуры в стержне с помощью команды **Graphics** → **Create Surface Plot**.

Варианты задания 2

| Вариант | $f(x)$ | a | b | Вариант | $f(x)$ | a | b |
|---------|------------------|-----|------|---------|--------------------------|-----|------|
| 1 | $x(x-1)$ | 0 | 0 | 9 | $(x^2 + 0,5) \cos(2p x)$ | 0,5 | 1,5 |
| 2 | $x^3 + x^2 - x$ | 0 | 1 | 10 | $\sin(px) \cos x$ | 0 | 0 |
| 3 | $x^2(1-x)$ | 0 | 0 | 11 | $x \sin(2(x-1))$ | 0 | 0 |
| 4 | $1-x^4$ | 1 | 0 | 12 | $\ln(0,5+x)(x-1)$ | 0,7 | 0 |
| 5 | $x \sin(2px)$ | 0 | -0,3 | 13 | $x \sin(4(x-1)) - x$ | 0 | -1 |
| 6 | $(x-1) \sin^2 x$ | 0 | 0 | 14 | $x \cos(2px)$ | 0 | 1 |
| 7 | $4x^2(x-1)$ | 0 | 0,5 | 15 | $x e^{-x}(x^4 - 2)$ | 0 | -0,4 |
| 8 | $10x^3(x-1)$ | 0,5 | 0 | 16 | $1-x^4 e^x$ | 0 | 1 |

Задание 3. Найти стационарное распределение температуры в квадратной пластине со стороной 1, описываемое уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

с краевыми условиями вида

$$\begin{aligned} u(0, y) &= f_1(y), \quad (0 \leq y \leq 1), \quad u(1, y) = f_2(y), \quad (0 \leq y \leq 1), \\ u(x, 0) &= f_3(x), \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u(x, 1) = f_4(y), \quad (0 \leq x \leq 1). \end{aligned}$$

Решить задачу с помощью функции *relax*.

Для решения задачи построить сетку из 11 узлов по x ($i = 0, 1, \dots, 10$) и из 11 узлов по y ($j = 0, 1, \dots, 10$). Отобразить графически с помощью команды **Graphics** → **Create Contour Plot** стационарное распределение температуры в пластине.

Варианты задания 3

| Вариант | $f_1(y)$ | $f_2(y)$ | $f_3(x)$ | $f_4(x)$ |
|---------|---------------|--------------------------|--------------------------------|----------|
| 1 | y^2 | $\cos y + (2 - \cos 1)y$ | x^3 | $1 + x$ |
| 2 | $e^y - e y^2$ | y | $1 - x^3$ | x^2 |
| 3 | $1 - y^2$ | y | $\sin x + 1 - x^3(1 + \sin 1)$ | x |
| 4 | 0 | y | $\sin x - x^3 \sin 1$ | x |

| Вариант | $f_1(y)$ | $f_2(y)$ | $f_3(x)$ | $f_4(x)$ |
|---------|--------------------------|--------------------------|-----------------------|-------------------|
| 5 | $e^y + y^2(1-e) - 1$ | y | 0 | x |
| 6 | y^2 | $\cos y + (3 - \cos 1)y$ | x^3 | $1 + 2x$ |
| 7 | 0 | y | $\sin x - x^3 \sin 1$ | x^2 |
| 8 | $2e^y - (1 + 2e)y^2 + 1$ | $-y$ | $1 - x^3$ | $x - 2$ |
| 9 | $-10y^2 - 8y + 6$ | $-10y^2 - 30y + 22$ | $9x^2 + 7x + 6$ | $9x^2 - 15x - 12$ |
| 10 | $-10y^2 - 8y + 6$ | $-10y^2 - 8y + 6$ | $6x^2 + 4x + 3$ | $6x^2 - 12x - 9$ |
| 11 | 1 | $y + 1$ | 1 | $1 + x$ |
| 12 | 1 | e^y | 1 | e^x |
| 13 | $-y^2 - 5y$ | $4 + 5y - y^2$ | $x^2 + 3x$ | $x^2 + 3x + 4$ |
| 14 | $3 - 7y$ | $7 - 6y$ | $4x + 3$ | $5x - 4$ |
| 15 | 0 | $\sin y$ | 0 | $\sin x$ |
| 16 | $e^y - y^2$ | y | $1 - x^3$ | $2 - x^2$ |

Лабораторная работа 8 Спектральный анализ и синтез

Существует множество процессов, обладающих свойством периодичности (повторяемости) во времени или пространстве. Техника и производство умножили количество примеров периодических процессов – колебания маятника, переменный ток, вибрации в машинах и т.д. Периодические процессы в математике моделируются периодическими функциями. Теория *рядов Фурье* является основой гармонического анализа, широко используемого для определения амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик для каждой из гармоник, из которых составлен изучаемый сложнопериодический процесс.

Таким образом, во многих прикладных задачах (процессы передачи информации, радиотехника, исследование движения машин и др.) существует возможность описания любой периодической функции $f(t)$ с периодом T , удовлетворяющей условиям Дирихле (периодическая функция должна иметь конечное число разрывов и непрерывные производные между ними), с помощью тригонометрического ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t), \quad (8.1)$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$ – частота повторения (или частота 1-й гармоники); k – номер гармоники. Этот ряд содержит бесконечное число косинусных или синусных составляющих – *гармоник*. Амплитуды этих составляющих a_k и b_k называются *коэффициентами Фурье* и определяются интегральными выражениями:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega_1 t \, dt; \quad (8.2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega_1 t \, dt. \quad (8.3)$$

Помимо упомянутой формы ряд Фурье можно представить в виде

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k), \quad (8.4)$$

где *амплитуда* A_k и *фаза* φ_k гармоник определяются выражениями:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad (8.5)$$

$$\varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}. \quad (8.6)$$

Гармонический анализ и синтез

Гармоническим анализом называют разложение функции $f(t)$, заданной на отрезке $[0, T]$ в ряд Фурье, или вычисление коэффициентов Фурье a_k и b_k по формулам (8.2) и (8.3).

Гармоническим синтезом называют получение колебаний сложной формы путем суммирования их гармонических составляющих (гармоник) (рис. 8.1).

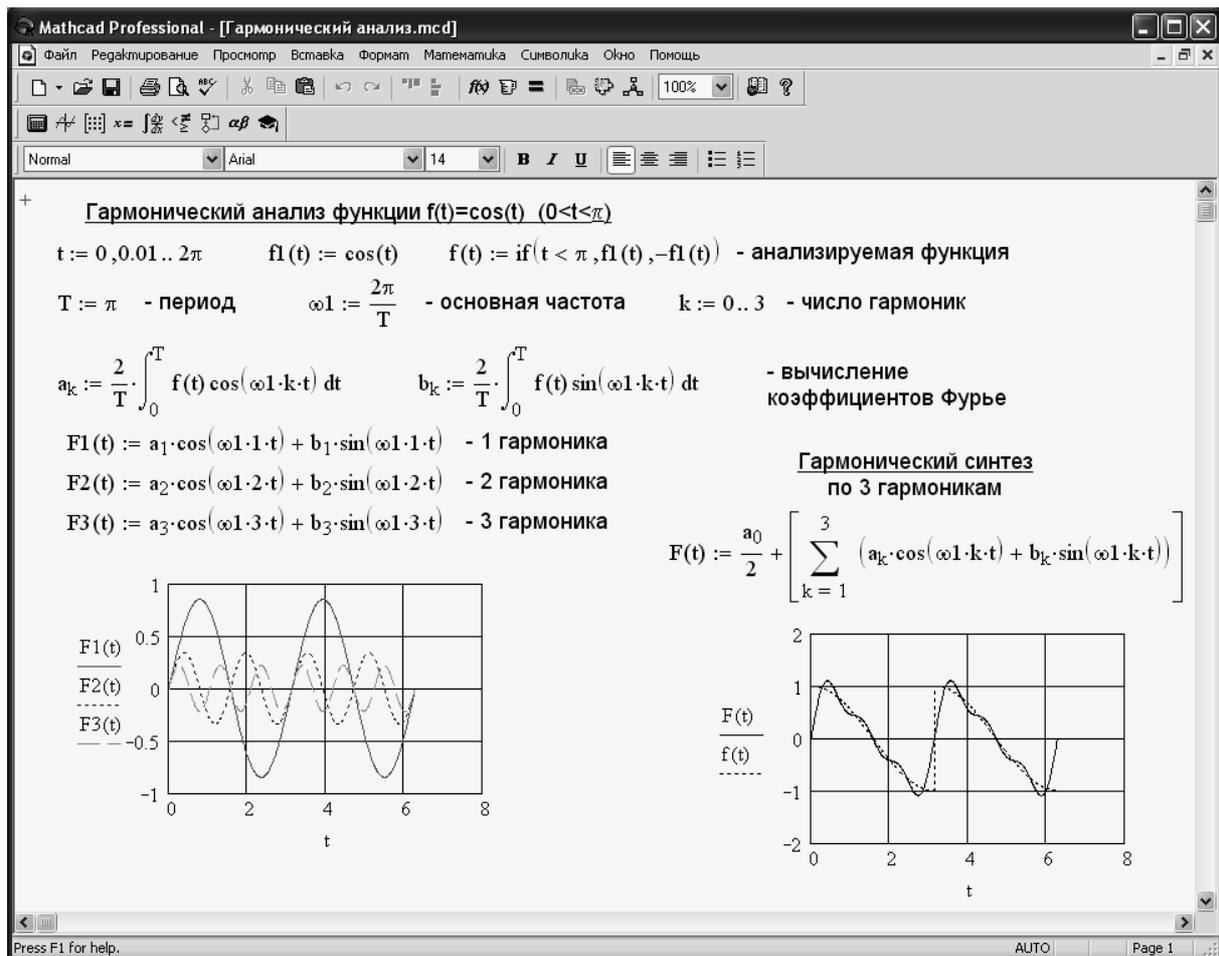


Рис. 8.1. Гармонический синтез

Классический спектральный анализ

Спектром временной зависимости (функции) $f(t)$ называется совокупность ее гармонических составляющих, образующих ряд Фурье. Спектр можно характеризовать некоторой зависимостью A_k (спектр амплитуд) и φ_k (спектр фаз) от частоты $\omega_k = k\omega_1$.

Спектральный анализ периодических функций заключается в нахождении амплитуды A_k и фазы φ_k гармоник (косинусоид) ряда Фурье (8.4). Задача, обратная спектральному анализу, называется *спектральным синтезом* (рис. 8.2 – продолжение рис. 8.1).

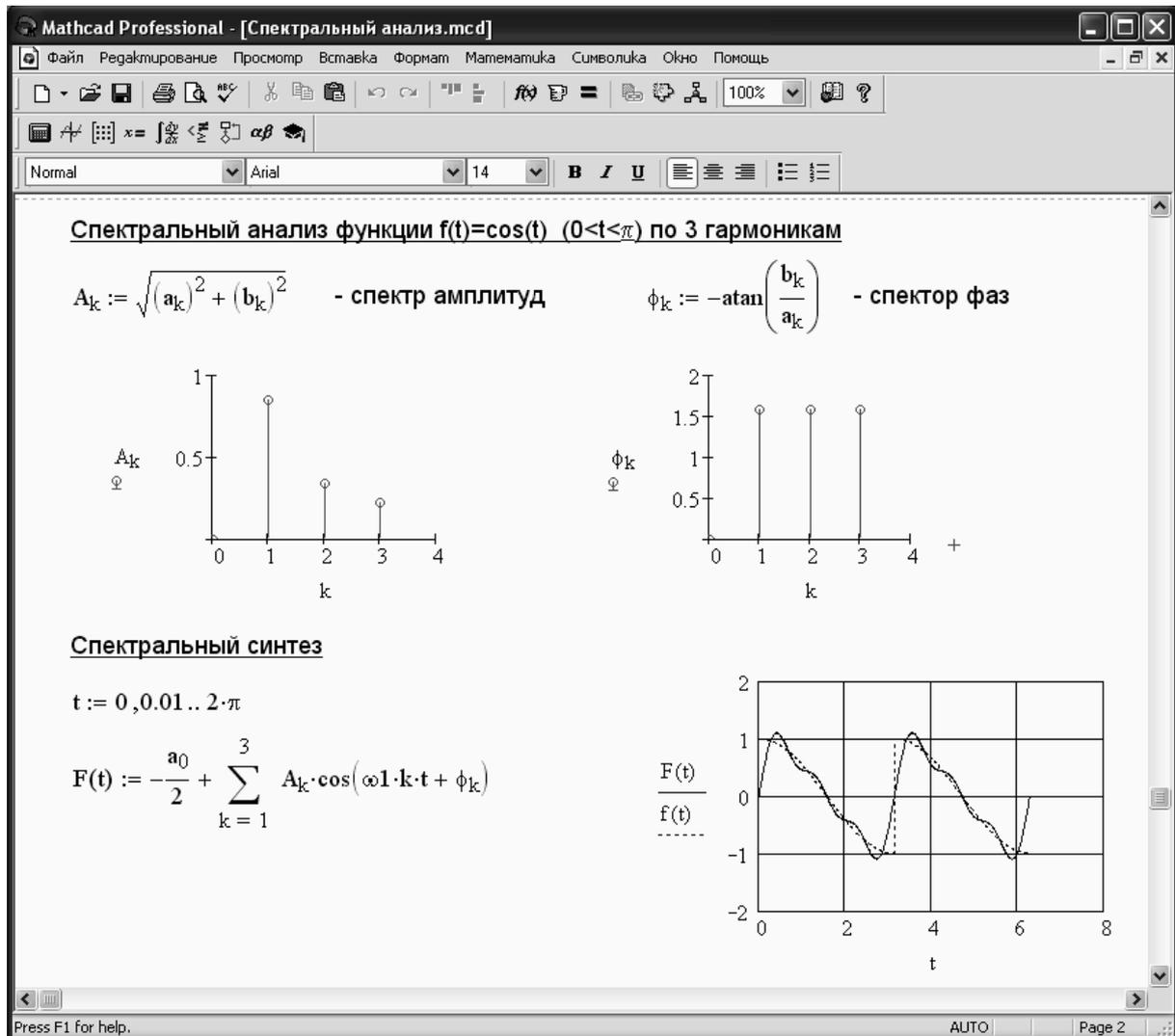


Рис. 8.2. Классический спектральный анализ и синтез

Термин “классический” означает, что коэффициенты Фурье вычисляются прямым интегрированием тем методом, который используется в Mathcad.

Численный спектральный анализ

Численный спектральный анализ заключается в нахождении коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$ (или $A_1, A_2, \dots, A_k, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$) для периодической функции $y=f(t)$, заданной на отрезке $[0, T]$ дискретными

отсчетами. Он сводится к вычислению коэффициентов Фурье по формулам численного интегрирования для метода прямоугольников (см. лаб. работу 5).

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos k\omega_1 i \Delta t; \quad (8.7)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_i \sin k\omega_1 i \Delta t, \quad (8.8)$$

где $\Delta t = T/N$ – шаг, с которым расположены абсциссы $y = f(t)$.

Спектральный анализ на основе быстрого преобразования Фурье

Встроенные в Mathcad средства быстрого преобразования Фурье (БПФ) существенно упрощают процедуру приближенного спектрального анализа. БПФ – быстрый алгоритм переноса сведений о функции, заданной 2^m (m – целое число) отсчетами во временной области, в частотную область. Если речь идет о функции $f(t)$, заданной действительными отсчетами, следует использовать функцию *fft*.

| | |
|---------------|--|
| <i>fft(v)</i> | Возвращает прямое БПФ 2^m -мерного вещественнозначного вектора v , где v – вектор, элементы которого хранят отсчеты функции $f(t)$. |
|---------------|--|

Результатом будет вектор A размерности $1 + 2^{m-1}$ с комплексными элементами – отсчетами в частотной области. Фактически действительная и мнимая части вектора есть коэффициенты Фурье a_k и b_k , что существенно упрощает их получение.

Функция *ifft* реализует обратное БПФ.

| | |
|----------------|--|
| <i>ifft(v)</i> | Возвращает обратное БПФ для вектора v с комплексными элементами. Вектор v имеет $1 + 2^{m-1}$ элементов. |
|----------------|--|

Результатом будет вектор A размерности 2^m с действительными элементами.

На рис. 8.3 показано применение БПФ для спектрального анализа и синтеза импульса.

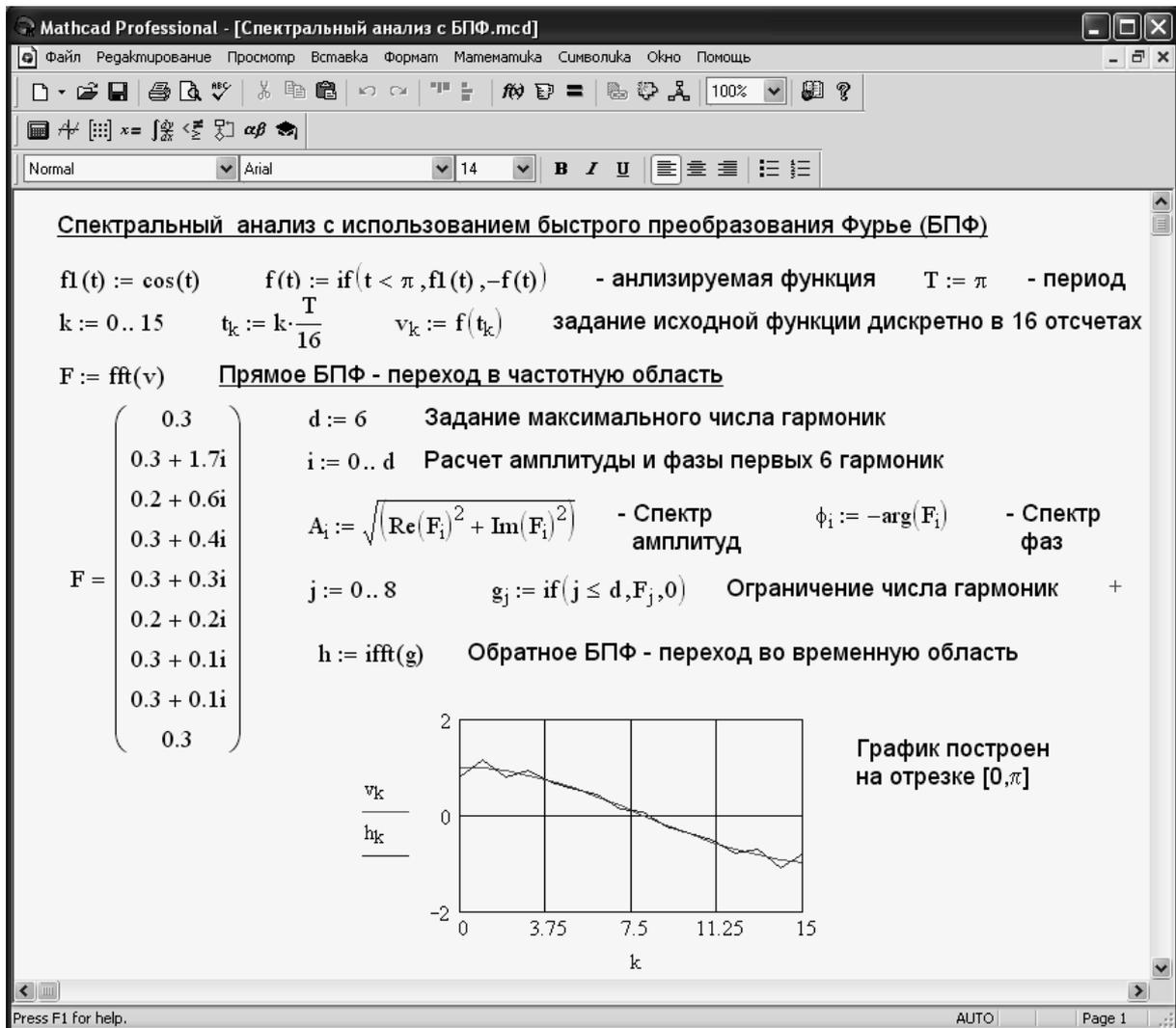


Рис. 8.3. Спектральный анализ с использованием БПФ

Фильтрация аналоговых сигналов

Под фильтрацией подразумевается выделение полезного сигнала из его смеси с мешающим сигналом – шумом. Наиболее распространенный тип фильтрации – частотная фильтрация. Если известна область частот, занимаемых полезным сигналом, достаточно выделить эту область и подавить те области, которые заняты шумом.

Рис. 8.4 иллюстрирует технику фильтрации с применением БПФ. Сначала синтезируется исходный сигнал, представленный 128 отсчетами вектора v . Затем к этому сигналу присоединяется шум с помощью генератора случайных чисел (функция rnd) и формируется вектор из 128 отсчетов зашумленного сигнала.

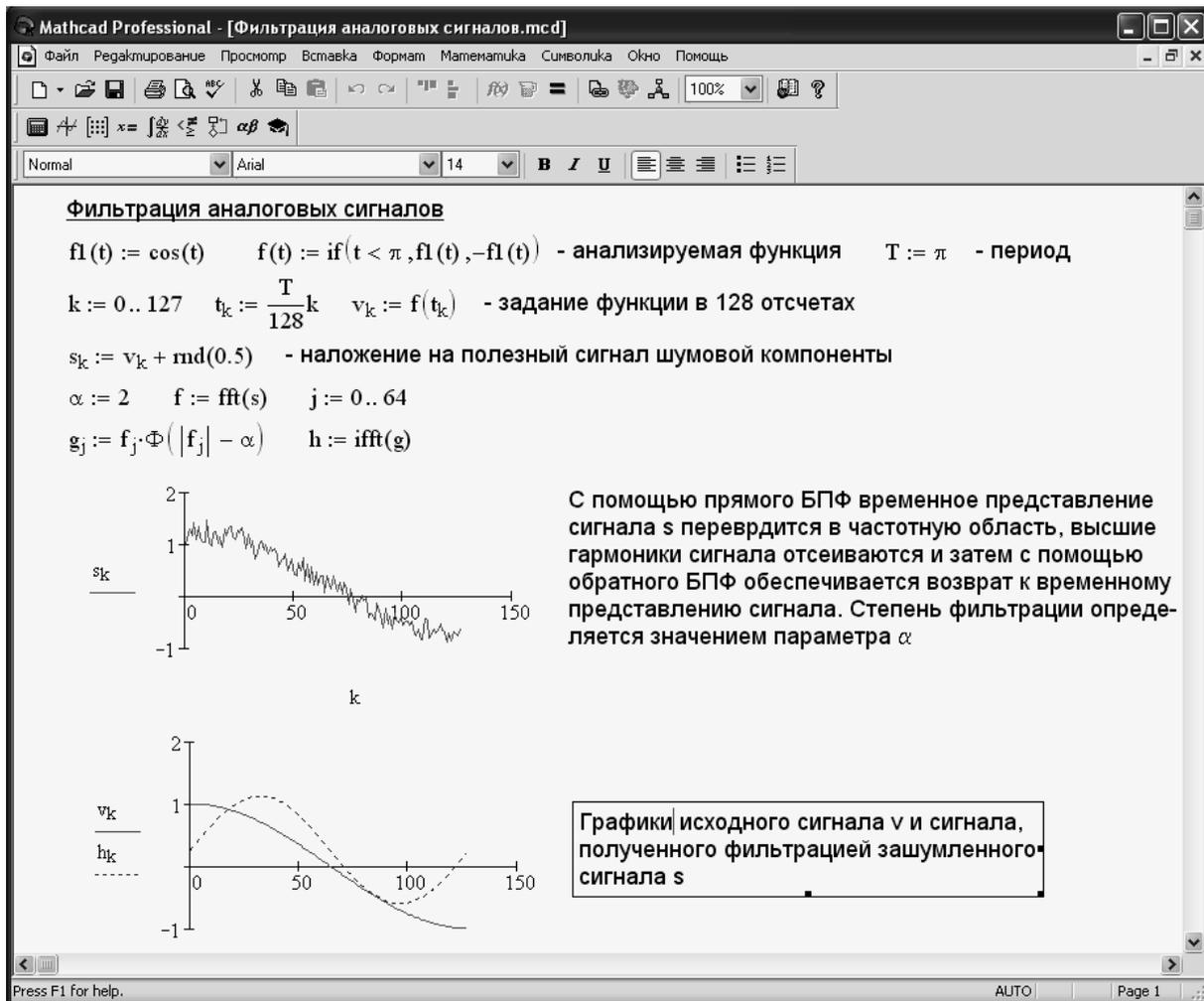


Рис. 8.4. Фильтрация аналоговых сигналов

Используя прямое БПФ, сигнал с шумом преобразуется из временной области в частотную, что создает вектор f из 64 частотных составляющих. Затем выполняется фильтрующее преобразование, эффективность которого оценивается параметром α . Фильтрующее преобразование удобно выполнять с помощью функции Хевисайда.

| | |
|-----------|---|
| $\Phi(x)$ | Ступенчатая функция Хевисайда. Возвращает 1, если $x \geq 0$; иначе 0. |
|-----------|---|

Отфильтрованный сигнал (вектор g) подвергается обратному БПФ и создает вектор выходного сигнала h . Сравнение временных зависимостей исходного и выходного сигналов показывает, что выходной сигнал почти полностью повторяет входной и в значительной мере избавлен от высокочастотных шумовых помех, маскирующих полезный сигнал.

Порядок выполнения лабораторной работы 8

Задание 1. Вычислить первые шесть пар коэффициентов разложения в ряд Фурье функции $f(t)$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Построить графики 1, 2-й и 3-й гармоник. Выполнить гармонический синтез функции $f(t)$ по 1, 2-й и 3-й гармоникам. Результаты синтеза отобразить графически.

Варианты задания 1

| Вариант | $f(t)$ | Вариант | $f(t)$ | Вариант | $f(t)$ |
|---------|--|---------|--|---------|---------------------------------------|
| 1 | $\frac{\cos t}{1 + \cos^2 2t}$ | 6 | $\cos t \cos \sin t $ | 11 | $\sin(\sqrt{1+t^2})$ |
| 2 | $\frac{\sin t}{1 + \cos^2 2t}$ | 7 | $\arctg\left(\cos \frac{1}{2}t\right)$ | 12 | $\cos(\sqrt{1+t^2})$ |
| 3 | $\frac{\sin 2t + \sin^2 3t}{3 + \sin t + \cos 2t}$ | 8 | $e^{\sin \frac{1}{3}t}$ | 13 | $e^{-10(t-\pi)^2}$ |
| 4 | $\frac{\sin 3t}{ \sin t + \cos t }$ | 9 | $ \sin t + \sin 2t $ | 14 | $e^{\cos \frac{1}{3}t}$ |
| 5 | $\cos e^{ \sin 3t }$ | 10 | $\sin\left(\frac{1}{2}t\right)^2$ | 15 | $e^{-\cos \frac{1}{2}t} \cos(\sin t)$ |

Задание 2. Выполнить классический спектральный анализ и синтез функции $f(t)$. Отобразить графически спектры амплитуд и фаз, результат спектрального синтеза функции $f(t)$.

Задание 3. Выполнить численный спектральный анализ и синтез функции $f(t)$. Для этого необходимо задать исходную функцию $f(t)$ дискретно в 32 отсчетах. Отобразить графически спектры амплитуд и фаз, результат спектрального синтеза функции $f(t)$.

Задание 4. Выполнить спектральный анализ и синтез функции $f(t)$ с помощью БПФ. Для этого необходимо:

- задать исходную функцию $f(t)$ дискретно в 128 отсчетах;
- выполнить прямое БПФ с помощью функции fft и отобразить графически найденные спектры амплитуд и фаз первых шести гармоник;
- выполнить обратное БПФ с помощью функции $ifft$ и отобразить графически результат спектрального синтеза функции $f(t)$.

Задание 5. Выполнить фильтрацию функции $f(t)$ с помощью БПФ:

- синтезировать функцию $f(t)$ в виде полезного сигнала, представленного 128 отсчетами вектора v ;
- к полезному сигналу v присоединить шум с помощью функции rnd ($rnd(2) - 1$) и сформировать вектор из 128 отсчетов зашумленного сигнала s ;
- преобразовать сигнал с шумом s из временной области в частотную, используя прямое БПФ (функция fft). В результате получится сигнал f из 64 частотных составляющих;
- выполнить фильтрующее преобразование с помощью функции Хевисайда (параметр фильтрации $\alpha = 2$);
- с помощью функции $ifft$ выполнить обратное БПФ и получить вектор выходного сигнала h ;
- построить графики полезного сигнала v и сигнала, полученного фильтрацией зашумленного сигнала s .

Приложение
Задачи для самостоятельного решения
 Решение уравнений

Определить корни уравнения численно и символично, сравнить результаты.

| Вариант | Функция | Вариант | Функция |
|---------|---|---------|--|
| 1 | $x - \sin x = 0,25$ $x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$ | 17 | $x^2 \cos(2x + 1) = -1$ $2x^4 - 3x^2 + 15 = 0$ |
| 2 | $\operatorname{tg}(0,2 + x) = x^3 + 3$ $x^3 + 2x^2 - 7x + 1 = 0$ | 18 | $0,5^x - 1 = (x + 2)^2$ $3x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$ |
| 3 | $(x + 1)^{1/3} - \cos(0,3 + 0,4x) = 2$ $x^3 + x^2 - 3x + 4 = 0$ | 19 | $\cos(x + 2) - x + 2x + 1 = 0$ $x^4 + 2x^2 + 3x - 10 = 0$ |
| 4 | $\operatorname{tg}(2,3 + 0,5x) = 3x + 2$ $2x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ | 20 | $x + \ln(2x + 3) = 0,5$ $-2^{x-1} - x = 0$ |
| 5 | $2e^{x+1} + 3x + 1 = 0$ $3x^4 + 4x^3 - 12x - 1 = 0$ | 21 | $x^2 + 4\sin(x + 1) = 0$ $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$ |
| 6 | $3x^2 + \cos(2x + 1) = 1$ $x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 2 = 0$ | 22 | $e^{2x+1} + 5x - 1 = 0$ $7x^3 - 2x^2 + 3x - 10 = 0$ |
| 7 | $5x\sin(2x + 1) = 0,43$ $x^3 - 7x^2 + 2x - 1 = 0$ | 23 | $2e^{x+1} - 3x + 1 = 0$ $x \lg(x^2 + 2x - 1) = 1$ |
| 8 | $x\cos(x + 2) = x^2 - 3x + 1$ $x^3 + x^2 + x - 10 = 0$ | 24 | $x^2 \cos(2x - 1) = 1$ $2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$ |
| 9 | $(x - 3)\cos(x + 2) = 1$ $2x^4 - 3x^3 + x - 1 = 0$ | 25 | $2x - \lg(x + 3) = 7$ $\operatorname{tg}^3(x) + x - 1 = 0$ |
| 10 | $\sin(x + \pi/3) + 0,5x + 2 = 0$ $x^4 - x - 1 = 0$ | 26 | $(1 - x)e^{3x-1} = 0,5$ $3\sin^2(x + 1) - x^2 + x = 2$ |
| 11 | $x \lg(x + 1) = 1$ $2x^3 - 9x^2 - 60x = 0$ | 27 | $2\sin(x - \pi/6) = x^2 - 0,5$ $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$ |
| 12 | $\operatorname{arctg} x - 1/(3x^3) = 0$ $2x^4 + x - 3 = 0$ | 28 | $5\cos(x + 3) = x - 0,5$ $3^x + 2 - x = 0$ |
| 13 | $\ln x + (x + 1)^3 = 0$ $x^2 - 2 + 0,5^x = 0$ | 29 | $x = (\log(x + 2))^{1/2} - 1$ $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ |
| 14 | $\cos(x + 0,5) = x^3$ $2x^4 + x - 3 = 0$ | 30 | $(x - 2)^3 \lg(x - 3) = 1$ $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$ |
| 15 | $(x - 4)^2 \log_2(x - 3) = 1$ $3x^4 + 8x^3 + 2x - 1 = 0$ | 31 | $(x^2 + 2x - 20)\sin(x + 1) = 1$ $e^x = (x + 1)^3$ |
| 16 | $e^{-2x} - 2x + 1 = 0$ $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$ | 32 | $3\cos(x + 1)^2 = 2x + 1$ $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$ |

Численное дифференцирование

Найти производную. Построить графики функции и производной.
Найти нули функции и точки экстремума.

| Вариант | Функция | Вариант | Функция | Вариант | Функция |
|---------|---|---------|--|---------|--|
| 1 | $y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}$ | 2 | $y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$ | 3 | $y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)}$ |
| 4 | $y = \frac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}}$ | 5 | $y = \frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$ | 6 | $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$ |
| 7 | $y = \frac{(x^2 - 6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$ | 8 | $y = \frac{(x^2 - 8)\sqrt{x^2 - 8}}{6x^3}$ | 9 | $y = \frac{4 + 3x^3}{x^3\sqrt{(2+x^3)^2}}$ |
| 10 | $y = \sqrt[3]{\frac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}$ | 11 | $y = \frac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{1-x^3}}$ | 12 | $y = \frac{(x^2 - 2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$ |
| 13 | $y = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$ | 14 | $y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$ | 15 | $y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$ |
| 16 | $y = \frac{x^6 + 8x^3 - 128}{\sqrt{8-x^3}}$ | 17 | $y = \frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$ | 18 | $y = (1-x^2)\sqrt[5]{x^3 + \frac{1}{x}}$ |
| 19 | $y = \frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$ | 20 | $y = \frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$ | 21 | $y = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$ |
| 22 | $y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ | 23 | $y = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$ | 24 | $y = 3\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$ |
| 25 | $y = 3 \cdot 3\sqrt{\frac{(x+1)}{(x-1)^2}}$ | 26 | $y = \frac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$ | 27 | $y = \frac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$ |
| 28 | $y = \frac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$ | 29 | $y = \frac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$ | 30 | $y = \frac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$ |
| 31 | $y = \frac{3x^6+4x^4-x^2-2}{15\sqrt{1+x^2}}$ | 32 | $y = 6\sqrt[3]{6x^2}/(x^2+4x+12)$ | — | — |

Тема 4. Численное интегрирование

Найти первообразную. Результат проверить дифференцированием. Вычислить определенный интеграл на отрезке [1; 2].

| Вариант | Функция | Вариант | Функция |
|---------|---|---------|---|
| 1 | $\int(4-3x)e^{-3x}dx$ | 2 | $\int\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}dx$ |
| 3 | $\int(3x+4)e^{3x}dx$ | 4 | $\int(4x-2)\cos 2xdx$ |
| 5 | $\int(4-16x)\sin 4xdx$ | 6 | $\int(5x-2)e^{3x}dx$ |
| 7 | $\int(1-6x)e^{2x}dx$ | 8 | $\int\ln(x^2+4)dx$ |
| 9 | $\int\ln(4x^2+1)dx$ | 10 | $\int(2-4x)\sin 2xdx$ |
| 11 | $\int\operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}dx$ | 12 | $\int e^{-2x}(4x-3)dx$ |
| 13 | $\int e^{-3x}(2-9x)dx$ | 14 | $\int\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}dx$ |
| 15 | $\int\operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}dx$ | 16 | $\int\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}dx$ |
| 17 | $\int(5x+6)\cos 2xdx$ | 18 | $\int(3x-2)\cos 5xdx$ |
| 19 | $\int(x\sqrt{2}-3)\cos 2xdx$ | 20 | $\int(4x+7)\cos 3xdx$ |
| 21 | $\int(2x-5)\cos 4xdx$ | 22 | $\int(8-3x)\cos 5xdx$ |
| 23 | $\int(x+5)\sin 3xdx$ | 24 | $\int(2-3x)\sin 2xdx$ |
| 25 | $\int(4x+3)\sin 5xdx$ | 26 | $\int(7x-10)\sin 4xdx$ |
| 27 | $\int(\sqrt{2}-8x)\sin 3xdx$ | 28 | $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$ |
| 29 | $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$ | 30 | $\int x\sin^2 xdx$ |
| 31 | $\int\frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}$ | 32 | $\int\frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$ |

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Найти решение задачи Коши, используя два различных метода. Построить графики решений, оценить расхождение между решениями, полученными разными методами.

| Вариант | Задача Коши | Вариант | Задача Коши |
|---------|--|---------|--|
| 1 | $y' + xy = (1+x)e^{-x} y^2, y(0) = 1$ | 2 | $xy' + y = 2y^2 \ln x, y(1) = 1/2$ |
| 3 | $2(xy' + y) = xy^2, y(1) = 2$ | 4 | $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2, y(0) = 1$ |
| 5 | $xy' - y = -y^2(\ln x + 2) \ln x, y(1) = 1$ | 6 | $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x} y^2, y(0) = 2$ |
| 7 | $3(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 3$ | 8 | $2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x(1 + \sin x), y(0) = 1$ |
| 9 | $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3), y(0) = -1$ | 10 | $3y' + 2xy = 2xy^{-2} e^{-2x^2}, y(0) = -1$ |
| 11 | $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = 1/\sqrt{2}$ | 12 | $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, y(1) = 1$ |
| 13 | $2y' + 3y \cos x = e^{2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, y(0) = 1$ | 14 | $3(xy' + y) = xy^2, y(1) = 3$ |
| 15 | $y' - y = 2xy^2, y(0) = 1/2$ | 16 | $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, y(1) = 1/2\sqrt{2}$ |
| 17 | $y' + 2xy = 2x^3 y^3, y(0) = \sqrt{2}$ | 18 | $xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1$ |
| 19 | $2y' + 3y \cos x = (8 + 12 \cos x)e^{2x} y^{-1}, y(0) = 2$ | 20 | $4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2, y(0) = 1$ |
| 21 | $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \sqrt{2}$ | 22 | $2(y' + y) = xy^2, y(0) = 2$ |
| 23 | $y' + xy = (x-1)e^x y^2, y(0) = 1$ | 24 | $2y' + 3y \cos x = -e^{-2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, y(0) = 1$ |
| 25 | $y' - y = xy^2, y(0) = 1$ | 26 | $2(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 2$ |
| 27 | $y' + y = xy^2, y(0) = 1$ | 28 | $y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x, y(1) = 1/\operatorname{sh} 1$ |
| 29 | $2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2, y(0) = 2$ | 29 | $y' - y \operatorname{tg} x = -(2/3)y^4 \sin x, y(0) = 1$ |
| 31 | $xy' + y = xy^2, y(1) = 1$ | 32 | $y' - y \cos x = \sin 2x, y(0) = -1$ |

Спектральный анализ и синтез

Найти период функции T . Вычислить первые шесть пар коэффициентов разложения в ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[0, T]$. Построить графики 1, 2-й и 3-й гармоник. Выполнить гармонический синтез функции по трем гармоникам. Результаты синтеза отобразить графически.

| Вариант | Функция | Вариант | Функция |
|---------|---|---------|---|
| 1 | $y = \sin \sqrt{3} + \frac{1 \sin^2 3x}{3 \cos 6x}$ | 2 | $y = \cos \ln 2 - \frac{1 \cos^2 3x}{3 \sin 6x}$ |
| 3 | $y = \operatorname{tg} \lg \frac{1}{3} + \frac{1 \sin^2 4x}{4 \cos 8x}$ | 4 | $y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{1 \cos^2 4x}{8 \sin 8x}$ |
| 5 | $y = \frac{\cos \sin 5 \cdot \sin^2 2x}{2 \cos 4x}$ | 6 | $y = \frac{\sin \cos 3 \cdot \cos^2 2x}{4 \sin 4x}$ |
| 7 | $y = \frac{\cos \ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7 \cos 14x}$ | 8 | $y = \cos(\operatorname{ctg} 2) - \frac{1 \cos^2 8x}{16 \sin 16x}$ |
| 9 | $y = \operatorname{ctg}(\cos 2) + \frac{1 \sin^2 6x}{6 \cos 12x}$ | 10 | $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \frac{1 \cos^2 10x}{20 \sin 20x}$ |
| 11 | $y = \frac{1}{3} \cos\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\right) + \frac{1 \sin^2 10x}{10 \cos 20x}$ | 12 | $y = \ln \sin \frac{1}{2} - \frac{1 \cos^2 12x}{24 \sin 24x}$ |
| 13 | $y = 8 \sin(\operatorname{ctg} 3) + \frac{1 \sin^2 5x}{5 \cos 10x}$ | 14 | $y = \frac{\cos(\operatorname{ctg} 3) \cdot \cos^2 14x}{28 \sin 28x}$ |
| 15 | $y = \frac{\cos\left(\operatorname{tg} \frac{1}{3}\right) \cdot \sin^2 15x}{15 \cos 30x}$ | 16 | $y = \frac{\sin\left(\operatorname{tg} \frac{1}{7}\right) \cdot \cos^2 16x}{32 \sin 32x}$ |
| 17 | $y = \frac{\operatorname{ctg}\left(\sin \frac{1}{3}\right) \cdot \sin^2 17x}{17 \cos 34x}$ | 18 | $y = \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2} \cdot \cos^2 18x}{36 \sin 36x}$ |
| 19 | $y = \frac{\operatorname{tg}(\ln 2) \cdot \sin^2 19x}{19 \cos 38x}$ | 20 | $y = \operatorname{ctg}(\cos 5) - \frac{1 \cos^2 20x}{40 \sin 40x}$ |
| 21 | $y = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \frac{\sin^2 21x}{21 \cos 42x}$ | 22 | $y = \cos(\ln 13) - \frac{1 \cos^2 22x}{44 \sin 44x}$ |
| 23 | $y = \ln \cos \frac{1}{3} + \frac{\sin^2 23x}{23 \cos 46x}$ | 24 | $y = \operatorname{ctg}\left(\sin \frac{1}{13}\right) - \frac{1 \cos^2 24x}{48 \sin 48x}$ |
| 25 | $y = \sin \ln 2 + \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}$ | 26 | $y = \sqrt[3]{\cos \sqrt{2}} - \frac{1 \cos^2 26x}{52 \sin 52x}$ |
| 27 | $y = \sqrt[7]{\operatorname{tg}(\cos 2)} + \frac{\sin^2 27x}{27 \cos 54x}$ | 28 | $y = \sin \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2} - \frac{\cos^2 28x}{56 \sin 56x}$ |
| 29 | $y = \cos^2 \sin 3 + \frac{\sin^2 29x}{29 \cos 58x}$ | 30 | $y = \sin^3 \cos 2 - \frac{\cos^2 30x}{60 \sin 60x}$ |
| 31 | $y = \operatorname{tg} \sqrt{\cos(1/3)} + \frac{\sin^2 31x}{31 \cos 62x}$ | 32 | $y = 2 \frac{\cos x}{\sin^4 x} + 3 \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ |

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 256 с.
2. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2000. – 266 с.
3. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс: Учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2002. – 960 с.
4. Гультияев А.К. MATLAB 5.2. Имитационное моделирование в среде Windows: Практ. пособие. – СПб.: КОРОНА принт, 1999. – 288 с.
5. Дьяконов В.П. Mathcad 2001: Спец. справ. – СПб.: Питер, 2002. – 832 с.
6. Дьяконов В.П. Mathcad 2001: Учеб. курс. – СПб.: Питер, 2001. – 624 с.
7. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики: Учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2002. – 592 с.
8. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 575 с.
9. Кирьянов Д.В. Самоучитель Mathcad 2001. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 544 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер с англ. – М.: Наука, 1982. – 832 с.
11. Кудрявцев Е.М. Mathcad 2000 Pro. – М.: ДМК Пресс, 2001. – 576 с.
12. Кузьмин В.В., Схирладзе А.Г., Усов С.В. Математическое моделирование технологических процессов в машиностроении: Учеб. пособие. – М.: Славянская шк., 2002. – 234 с.
13. Максимов С.А. Математическое моделирование. Введение в метод. Постановка задачи: Учеб. пособие / Владим. гос. ун-т. – Владимир, 1997. – 192 с.
14. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad: математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 656 с.
15. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений: Пер с англ. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
16. Черняк А.А., Новиков В.А., Мельников О.И. и др. Математика для экономистов на базе Mathcad: Учеб. пособие. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 496 с.

СПИСОК РЕСУРСОВ ИНТЕРНЕТ

1. Амосова О.А., Григорьев В.П., Зайцева С.Б. Вычислительные методы с применением математического пакета Mathcad. Лабораторные работы. – <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/amosova/lr.asp>.
2. Болотский А.В., Сугробов Г.В. Построение графиков в системе Mathcad. – <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/bolotsky/main.asp>.
3. Болотский А.В., Сугробов Г.В. Решение нелинейных и дифференциальных уравнений. Решение систем уравнений. – <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/bolotsky/ur/main.asp>.
4. Виртуальная лаборатория математического моделирования. – <http://mathmod.narod.ru/>.
5. Образовательный математический сайт. – <http://www.exponenta.ru/>.
6. Семенов М.Г. Лабораторная работа на тему «Обработка экспериментальных данных в MathCad». – <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/semenenko/cathode/main.asp>.
7. Семенов М.Г. Лабораторная работа на тему «Решение уравнений в частных производных гиперболического типа в MathCad». – <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/semenenko/hyperb/main.asp>.
8. Тарасевич Ю.Ю. Численные методы на Mathcad. – <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/tarasevich/default.asp>.
9. Учебно-методический комплекс «Численные методы с системой Mathcad». – <http://petrsu.karelia.ru/psu/Deps/IMO/Complex/>.
10. Ханова А.А. Введение в систему Mathcad. – <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/hanova/introduction/main.asp>.
11. Ханова А.А., Макарова И.Г. Лабораторный практикум по математическому моделированию и методам в расчетах на ЭВМ. – <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/hanova/lab/lr.asp>.
12. Чернова Н.М. Лабораторный практикум по курсу «Численные методы» – <http://neisri.magadan.ru/academnet/infocentr/matematika/Chernova.html>.
13. Электронная библиотека механико-технологического факультета ВлГУ. – <http://space.vpti.vladimir.ru/library/library.htm>.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| Введение..... | 3 |
| Лабораторная работа 1 ОСНОВЫ РАБОТЫ С MATHCAD | 4 |
| Лабораторная работа 2 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ | 12 |
| Лабораторная работа 3 ОБРАБОТКА ТАБЛИЧНЫХ ДАННЫХ | 20 |
| Лабораторная работа 4 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ | 27 |
| Лабораторная работа 5 ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ | 35 |
| Лабораторная работа 6 РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ | 41 |
| Лабораторная работа 7 РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ | 50 |
| Лабораторная работа 8 СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ | 60 |
| Приложение | 68 |
| Рекомендательный библиографический список | 73 |
| Список ресурсов Интернет..... | 74 |

Учебное издание

НОВИКОВА Елена Александровна

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Лабораторный практикум

Редактор Е.А. Амирсейидова

Корректор

Компьютерный набор А.Б. Костерин

Компьютерная верстка Д.Н. Ях

Дизайн обложки Е.А. Новикова

ЛР № 020275. Подписано в печать 25.01.04.

Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.

Печать офсетная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 100 экз.

Заказ

Редакционно-издательский комплекс

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.